«Du tenker mindre på matte'n, egentlig!»

Et søkelys på norske elevers bruk av digitale hjelpemidler i matematikk

Eirik Sandstad

Masteroppgave i matematikkdidaktikk
Institutt for lærerutdanning og skoleforskning
Utdanningsvitenskapelig fakultet

UNIVERSITETET I OSLO

Våren 2012

«Du tenker mindre på matte’n, egentlig!»

Et søkelys på norske elevers bruk av

digitale hjelpemidler i matematikk

Våren 2012

«Du tenker mindre på matte'n, egentlig!»

Eirik Sandstad

http://www.duo.uio.no/

Trykk: Reprosentralen, Universitetet i Oslo

Sammendrag

Tema for denne masteroppgaven er elevers bruk av digitale hjelpemidler i matematikk, og hvordan utformingen av matematikkoppgavene påvirker bruken. Jeg har tatt utgangspunkt i resultatene fra TIMSS Advanced 2008, en stor internasjonal undersøkelse av matematikk og fysikk i videregående skole. I den norske rapporten fra undersøkelsen (Grønmo, Onstad & Pedersen, 2010) setter forfatterne spørsmålstegn ved om den norske bruken av kalkulator bidrar til å fremme matematisk forståelse. Som en følge av den teknologiske utviklingen norsk skole har hatt i de siste årene, har jeg valgt å innlemme bruk av digitale hjelpemidler i dette spørsmålet.

For å besvare min problemstilling har jeg benyttet meg av tre ulike datakilder. Resultatene fra TIMSS Advanced 2008 er grunnlaget for min studie, og jeg har hentet informasjon om elevenes prestasjoner og bruk av kalkulator derfra. Mine egne undersøkelser startet med en prøve i en R2-klasse, som er det mest avanserte matematikkurset i videregående skole. Besvarelsene ble brukt til å velge ut elever til intervju knyttet til deres bruk av digitale hjelpemidler. Dette ga meg både kvantitative og kvalitative data, som i all hovedsak pekte i samme retning med tanke på elevers hjelpemiddelbruk.

Funn i undersøkelsene viser at norske elever bruker kalkulatoren mye, over 90 % oppgir at de bruker den i hver eller nesten hver time. Bruken av digitale hjelpemidler er hovedsakelig knyttet til oppgaver der de kjenner en bestemt løsningsalgoritme. For at elevene skal kjenne igjen slike oppgaver, er utformingen av oppgaven viktig. I min masteroppgave definerer jeg begrepet triggerord – formuleringer i en oppgave som leder eleven til å bruke digitale hjelpemidler i oppgaveløsingen. Mine funn forteller at triggerord i oppgaver fører til at elevene bruker hjelpemidlene vesentlig oftere enn de gjør i tilsvarende oppgaver uten triggerord. Norske elever evner i liten grad å bruke hjelpemidlene kreativt dersom en løsningsalgoritme ikke er opplagt. Dette kan skyldes at man bruker lite tid på å diskutere strategier for problemløsning i norsk matematikkundervisning, selv om forskning viser at utforskende og problembasert undervisning er en forutsetning for fruktbar bruk av digitale hjelpemidler. Elevene forteller at de har blitt svakere i hoderegning som følge av deres hjelpemiddelbruk, noe som igjen har ført til svekket matematisk selvtillit når de ikke har tilgang på kalkulator eller PC.

Forord

Det sies at tiden går fort når man har det gøy, men etter det siste halvåret kan jeg skrive under på at tiden løper avgårde uavhengig av sinnstilstand. Arbeidet med masteroppgaven har inneholdt høye topper og dype daler. Størst var gleden over å intervjue reflekterte, interessante og humørfylte elever, mens frustrasjonen nådde sitt toppunkt da påsken ble brukt til å transkribere disse samtalene. I løpet av denne prosessen har jeg fått mye og god hjelp, og det er mange som fortjener opptil flere klapp på skuldra.

Først vil jeg rette en stor takk til mine veiledere Torgeir Onstad, Arne Hole og Helmer Aslaksen, som har gitt meg gode og konstruktive tilbakemeldinger underveis. Jeg har gledet meg til hver veiledningstime, noe de nevnte herrer bør ta som en stor kompliment. Veiledergruppen har utfylt hverandre på en fin måte, og bidratt med innspill til alt fra tolking av elevsvar til bøyning av sterke verb på trøndersk. De har også vært behjelpelige når jeg har hatt behov for ulike resultater fra TIMSS Advanced 2008, og med det gjort mitt arbeid langt enklere.

Jeg vil også takke lærer og elever i klassen som tok min prøve, og spesielt de elevene som deltok på intervju. Uten deres velvilje hadde det vært vanskelig, for ikke å si umulig, å gjennomføre denne undersøkelsen.

Familien min fortjener også en takk, for å være nettopp det. Bestemor Sigrunn har i sitt 85. år bidratt med oppmuntrende og motiverende tekstmeldinger. Foreldrene mine, Ragnhild og Sigvar, har ordet i sin makt, og med det vært ypperlige korrekturlesere.

Sist, men aller mest, vil jeg takke min kjære Karen, som har holdt ut med meg gjennom dette halvåret. Hennes oppmuntringer har vært uvurderlige, og hun skal ha en stor del av æren for at arbeidet ble sluttført i tide.

Oslo, mai 2012.

Eirik Sandstad

Innholdsfortegnelse

1 Innledning

1.1 Bakgrunn for valg av tema

Tema for denne oppgaven er elevers bruk av digitale hjelpemidler i matematikk, og hvordan utformingen av matematikkoppgavene påvirker bruken. Jeg har tatt utgangspunkt i TIMSS Advanced 2008, en stor internasjonal undersøkelse av matematikk og fysikk i videregående skole (Grønmo, Onstad & Pedersen, 2010). TIMSS er en forkortelse for Trends in International Mathematics and Science Study. Formålet med undersøkelsen er å beskrive og sammenlikne elevprestasjoner i de nevnte fagene, både nasjonalt og internasjonalt. Data fra undersøkelsen gjør det mulig å belyse forskjeller i prestasjoner, slik at man kan si noe om hvilke faktorer som bidrar til læring, og hvilke som hindrer læring. Et av funnene fra studien er at norske elever bruker kalkulator mye sammenliknet med elever fra andre land. Undersøkelsen gir ikke informasjon om hvordan elevene bruker kalkulatoren, noe jeg ønsket å finne ut mer om gjennom denne oppgaven. Jeg kommer tilbake til TIMSS Advanced 2008 i neste kapittel.

Mulighetene for å bruke digitale hjelpemidler har blitt større i de siste årene, og undersøkelser viser at bruken øker blant elevene (Kløvstad, 2009). Ved innføringen av Kunnskapsløftet i 2006 kom det å kunne bruke digitale verktøy inn i læreplanen som en av fem grunnleggende ferdigheter i alle fag. Bruken av IKT i skolen er også jevnlig å finne i mediebildet, og blir diskutert både hjemme ved middagsbordet og i politiske kretser. En kombinasjon av disse faktorene gjør det spesielt interessant å se på hvordan elever bruker digitale hjelpemidler i matematikk.

1.2 Formål og problemstilling

«Matematikk i motvind» (Grønmo et al., 2010), den norske rapporten fra TIMSS Advanced 2008, setter spørsmålstegn ved norske elevers bruk av kalkulator. Forfatterne peker på at kalkulatoren kan brukes som et redskap for å løse avanserte problemer, men også som en «krykke», i den forstand at de bruker den til å gjøre beregninger som med fordel kunne vært trent inn som grunnleggende ferdigheter. Som eksempel på dette nevner de elever som bruker kalkulatoren til å multiplisere ensifrede tall, eller elever i videregående skole som bruker symbolregner til enkel derivasjon. I avslutningen av delkapittelet om bruk av kalkulator byr de opp til en diskusjon rundt temaet:

> På bakgrunn av flere av resultatene i TIMSS Advanced er det betimelig å ta en diskusjon om den norske bruken av kalkulator virkelig bidrar til å utvikle matematisk forståelse bedre enn det man kunne uten slike tekniske hjelpemidler, eller om vi i hovedsak lar elevene bruke teknologien som krykke (Grønmo et al., 2010, s. 188).

Det er denne diskusjonen jeg ønsker å bidra til gjennom denne oppgaven, og da først og fremst gjennom å gi innsikt i hva som kan sies å være «den norske bruken av kalkulator». Utviklingen som har skjedd i norsk skole siden undersøkelsen i 2008 gjør det naturlig å innlemme bruk av matematisk programvare i min problemstilling, slik at vi snakker om den norske bruken av kalkulator og PC. Mange skoler utstyrte i 2007/2008 sine elever med bærbar datamaskin (Kløvstad, 2009), noe som gir bedre forutsetninger for å integrere IKT i undervisningen enn man hadde tidligere. Vi er med andre ord i startfasen når det gjelder bruk av matematisk programvare i undervisningen, og det er grunn til å tro at utviklingen med hyppigere bruk av PC vil fortsette. Dette gjør at arbeidet med å kartlegge hvordan norske elever bruker digitale hjelpemidler er viktig, for å kunne styre den videre bruken i hensiktsmessig pedagogisk retning.

I mitt arbeid har resultatene og rapporten fra TIMSS Advanced 2008 stått sentralt. Resultatene fra enkelte av oppgavene forteller om elevene har brukt kalkulator eller ikke, mens vi ellers er overlatt til å tolke oppgaveteksten og svarprosentene for å kunne si noe om hvordan elevene har løst oppgavene. For å belyse dette har jeg jobbet etter følgende problemstilling:

Hvordan bruker norske elever grafisk kalkulator og GeoGebra i oppgaveløsing, og hvordan påvirkes bruken av oppgavens utforming?

Grafisk kalkulator ble benyttet av elevene i TIMSS Advanced 2008, mens elevene i min undersøkelse benyttet enkel kalkulator og GeoGebra. GeoGebra ble valgt i problemstillingen for å snevre inn begrepet matematisk programvare; et begrep som inneholder en rekke programmer og ville gjort denne oppgaven for stor i forhold til tidsrammen. Grunnen til at akkurat GeoGebra ble valgt er at det er det mest brukte matematikkprogrammet i undervisningen i dag, samt at det blir referert til i nye læreverk (Hals, 2010). Problemstillingens andre del skriver seg fra antakelsen til Grønmo, Onstad og Pedersen (2010) om at norske elever behersker enkel bruk av kalkulator, men ikke evner å bruke den på oppgaver som ikke «innbyr» til hjelpemiddelbruk. For å belyse dette definerer jeg senere i oppgaven begrepet «triggerord»; formuleringer i oppgaveteksten som hjelper elevene til å tenke på kalkulatoren som et aktuelt hjelpemiddel.

Siden konsekvenser av hjelpemiddelbruken blir diskutert både i «Matematikk i motvind» og blant øvrige skoleforskere, har jeg også satt opp en underproblemstilling:

Finnes det indikasjoner på at elevenes holdninger og ferdigheter i matematikk påvirkes av deres bruk av digitale hjelpemidler?

Problemstillingene er omfattende, og innenfor de gitte rammer har jeg ikke tatt mål av meg til å avklare hva som er den norske bruken av kalkulator og PC. Hensikten er å bidra med kunnskap som gjør at vi kommer nærmere en beskrivelse, samt å se på hvilke konsekvenser bruken har for elevene i mitt utvalg. I det neste delkapittelet redegjør jeg kort for metoden jeg har brukt for å besvare problemstillingene.

1.3 Metoder

TIMSS Advanced 2008 danner bakteppe for mine egne undersøkelser, samtidig som den bidrar med kvantitative data som blir brukt både i resultatdelen og oppsummeringen i denne oppgaven. Min undersøkelse startet med en gjennomgang av oppgavene som ble brukt i TIMSS Advanced, med tanke på å plukke ut oppgaver til en prøve som kunne si noe om elevenes bruk av digitale hjelpemidler. Siden R2 er det mest avanserte matematikkurset i dagens videregående skole ble elever fra dette kurset valgt ut til å ta prøven, hvorpå besvarelsene ble analysert med hensyn til hjelpemiddelbruk. På bakgrunn av besvarelsene ble fire elever valgt ut til intervju. Disse elevene varierte, både når det gjaldt antall riktige svar og hyppighet i bruk av hjelpemidler. Metodene blir utdypet og gjennomgått i kapittel 4.

1.4 Oppgavens struktur

I det neste kapittelet presenterer jeg TIMSS Advanced 2008 mer inngående. I tillegg argumenterer jeg for valget om å inkludere GeoGebra sammen med grafisk kalkulator i problemstillingen, og gir en sammenlikning av de to hjelpemidlene. Jeg tar også for meg forskjeller mellom 3MX, som var det mest avanserte matematikkurset i videregående skole da TIMSS Advanced 2008 ble gjennomført, og dagens R2.

I kapittel 3 presenterer jeg teori som er viktig for å forstå resultatene i min undersøkelse, og som kan sette resultatene inn i et større bilde. Forskningslitteratur knyttet til digitale hjelpemidler blir lagt fram, samtidig som jeg ser nærmere på læringsteorier knyttet til kunnskap og forståelse i matematikk, for bedre å kunne sette seg inn i valgene elevene tar. I kapittel 4 gjør jeg greie for metodene som ble brukt i denne oppgaven, og forklarer bakgrunnen for de valgene jeg har tatt. Kapittel 5 inneholder resultatene fra undersøkelsen og diskusjoner knyttet til hver enkelt oppgave. Her presenterer jeg også elevenes svar om holdninger og ferdigheter i matematikk.

I kapittel 6 diskuterer jeg resultatene fra undersøkelsen, og knytter dem opp mot teori fra kapittel 3. På bakgrunn av dette trekker jeg noen konklusjoner om oppgavens viktigste funn. Her kommer jeg også med mine tanker om resultatene, og hva funnene kan bety for framtidig matematikkundervisning i Norge. Kapittelet avsluttes med forslag til videre forskning basert på funn i denne oppgaven.

1.5 Viktige begrep og definisjoner

Fokuset i denne oppgaven ligger på grafiske kalkulatorer og GeoGebra, og jeg bruker hovedsakelig begrepet *digitale hjelpemidler* om disse. For å bedre flyten i språket blir også begrepene *digitale verktøy*, *IKT* eller bare *hjelpemidler* brukt som synonymer. Dersom jeg på noe punkt i teksten legger noe annet i disse begrepene, blir dette presisert.

Matematisk programvare er et annet begrep som blir brukt i oppgaven, og omfatter her alle dataprogrammer som er laget for matematisk bruk. I begrepet finner vi da regneark, programmer som kan håndtere matematiske symboler, utføre beregninger og tegne grafer og matematiske figurer. *Dynamisk programvare* er en viktig del av matematisk programvare, og jeg bruker Hals (2010) sin definisjon av begrepet i denne oppgaven:

> Dynamisk programvare blir her definert som *matematisk programvare der forbindelsen mellom et algebraisk uttykk [sic] og den tilhørende grafiske representasjonen fungerer begge veier*. En forandring av den ene fører da til en umiddelbar oppjustering av den andre representasjonen (Hals, 2010, s. 3).

I forbindelse med gjennomgangen av matematikkoppgavene bruker jeg et begrep inspirert av rapporten «Matematikk i motvind» (Grønmo et al., 2010), nemlig *triggerord*. Triggerord blir her definert som *ord eller korte formuleringer i en matematikkoppgave, som leder eleven til å* *tenke at oppgaven kan løses ved hjelp av digitale verktøy*. Eksempler på slike triggerord er «grafen», «toppunkt og bunnpunkt», «grafen til funksjonen» og eksplisitt gitte funksjonsuttrykk. I forbindelse med dette omtaler jeg også *kreativ hjelpemiddelbruk*. Med dette menes bruk av digitale hjelpemidler på oppgaver som ikke inneholder triggerord, men der de likevel kan være nyttige i løsningsarbeidet. Eksempler på kreativ hjelpemiddelbruk kommer vi tilbake til i kapittel 5.

2 Bakgrunn

I dette kapittelet presenterer jeg TIMSS Advanced 2008, og tar for meg sider ved undersøkelsen som er sentrale for min studie. Fremstillingen bygger i all hovedsak på den norske rapporten fra undersøkelsen (Grønmo et al., 2010) Jeg gir videre en vurdering av likheter og forskjeller mellom grafisk kalkulator og GeoGebra, før jeg argumenterer for valget om å la elevene i min testklasse bruke GeoGebra i arbeid med oppgaver der grafisk kalkulator opprinnelig var tenkt hjelpemiddel. Til slutt tar jeg for meg kursene 3MX og R2, med tanke på endringer i det matematiske innholdet i dem. Kursene var de mest avanserte matematikkursene i videregående skole henholdsvis da TIMSS Advanced og min undersøkelse ble gjennomført.

2.1 Om TIMSS Advanced 2008

TIMSS Advanced er en stor internasjonal undersøkelse, gjennomført i regi av International Association for the Evaluation of Educational Achievement. Målet for studien er å undersøke det vi kan kalle «matematikkspesialister» og «fysikkspesialister» i det siste året på videregående skole. På tiden for undersøkelsene var dette i Norge elever som tok henholdsvis 3MX og 3FY. TIMSS Advanced kartlegger blant annet elevenes faglige nivå, deres syn på faget, læreres og elevers syn på undervisningen, samt elevenes alder, kjønn og hjemmebakgrunn. Dette omfattende datamaterialet gir muligheten til å sammenlikne både faglig nivå og forskjeller i undervisningen mellom deltakerlandene. Siden det ble gjennomført en tilsvarende undersøkelse i 1995 (matematikkdelen av undersøkelsen ble i Norge gjennomført i 1998), kan man også studere utviklingen over tid, og til en viss grad identifisere faktorer som bidrar til en positiv utvikling innen matematikk i skolen.

For å kunne si noe om utviklingen over tid, er man avhengig av reliable trenddata. For å oppnå dette må et tilstrekkelig antall oppgaver være identiske i to studier, noe som fører til at TIMSS Advanced hemmeligholder en del oppgaver for å bruke dem i senere undersøkelser. Til denne oppgaven har jeg fått tilgang til samtlige oppgaver, men kan naturlig nok ikke gjengi dem i sin helhet. I resultatkapittelet blir de oppgavene jeg har brukt som ikke er frigitt beskrevet uten å avsløre for mye. De norske resultatene på oppgaver som var med både i 1998 og i 2008 er så godt som uten unntak nedslående lesning. Resultatene fra 2008 viser en signifikant nedgang i prestasjonene blant norske elever, noe som fører oss godt under det internasjonale gjennomsnittet. Jeg skal komme tilbake til noen av de andre funnene fra undersøkelsen senere i oppgaven, men for en fyldig gjennomgang vises det til rapporten «Matematikk i motvind» (Grønmo et al., 2010).

I rapporten og enkelte steder i min oppgave vises det til såkalte referanseland. Dette er land valgt ut på bakgrunn av flere punkter, men viktigst er landenes undervisningsprofil. Gjennom flere undersøkelser har det dannet seg klare mønstre for grupper av land som relativt sett presterer godt på noen deler av matematikken, og mindre bra på andre deler. Norge er en del av en nordisk profil, som har fellestrekk med en engelskspråklig profil. Kjennetegnet ved disse profilene er at elevene presterer relativt best på oppgaver knyttet til dagliglivet, men relativt svakt på oppgaver i ren matematikk. Rake motsetninger til disse profilene er den østeuropeiske og den østasiatiske profilen, der elevene presterer relativt sett best på oppgaver som krever eksakte utregninger og bruk av algebra. I tillegg til disse finnes det en mer kompleks og sammensatt profil i Sør-Europa. I TIMMS Advanced 2008 deltok ingen land med engelsk eller østasiatisk undervisningsprofil, men Nederland og Italia ble valgt som representanter for det europeiske kontinentet og Slovenia for den østeuropeiske profilen. I tillegg ble også Sverige valgt som referanseland.

Et annet punkt i valget av referanseland var deltakernes alder. Elever fra Sverige, Slovenia og Norge hadde nøyaktig samme gjennomsnittsalder, nemlig 18,8 år (Grønmo et al., 2010). De italienske elevene var 0,2 år eldre enn dette, mens elevene fra Nederland var 0,8 år yngre. Et siste element som må kommenteres når det gjelder referanseland er den såkalte dekningsgraden. I Norge tok 10,9 % av hele årskullet det mest avanserte matematikkurset på videregående skole. Tilsvarende tall for Slovenia, Italia, Sverige og Nederland er henholdsvis 40,5 %, 19,7 %, 12,8 % og 3,5 % av hele årskullet. Denne informasjonen er viktig å ha i bakhodet når vi diskuterer resultater på tvers av land.

For min undersøkelse har en viktig side ved TIMMS Advanced 2008 vært informasjonen om kalkulatorbruk. Kalkulator var tillatt i 1995, og det ble derfor tidlig bestemt at det skulle være tillatt også i 2008. Et argument for å tillate kalkulator var at elevene skulle kunne møte testen med samme rammebetingelser som de er vant til fra egen skolegang. En annen grunn var at testbetingelsene måtte være like begge år. Dette var likevel ikke helt uproblematisk, siden kalkulatorer har utviklet seg kolossalt siden midten av 1990-tallet (Mullis, Martin, Robitaille & Foy, 2009). Det er også store forskjeller mellom land med tanke på hvilke kalkulatorer som er vanlige i skolen. Norges representanter fikk derfor igjennom et forslag om en spesiell koding av besvarelsene på de åpne oppgavene, som skulle vise om elevene hadde benyttet kalkulator i oppgaveløsningen. Disse kodene har vært til stor hjelp i min undersøkelse.

2.2 Grafisk kalkulator versus GeoGebra

I min studie har jeg valgt å se på elevenes bruk av både grafisk kalkulator og GeoGebra. Jeg mener derfor det er hensiktsmessig med en kort gjennomgang av likheter og forskjeller mellom de to hjelpemidlene. Dynamisk programvare ble beskrevet i forrige kapittel, og GeoGebra er i dag det mest brukte dynamiske programmet i norsk skole (Hals, 2010). Navnet er en krysning av **Geo**metry og al**gebra**, og antyder med det programmets bruksområder. GeoGebra kombinerer egenskapene til dynamisk geometriprogramvare med egenskapene til graftegningsverktøy, noe som blant annet gir muligheten til å utføre konstruksjoner, løse likninger og drøfte funksjoner. Programvaren er gratis, og kan lastes ned fra www.geogebra.org. Nettopp pris og tilgjengelighet er nok hovedårsaker til at programmets relativt raske utbredelse. I tillegg har det et forholdsvis enkelt brukergrensesnitt, noe som gjør GeoGebra godt egnet til undervisning. For mer om programmet viser jeg til nettsiden http://wiki.geogebra.org/en/.

Både en grafisk kalkulator og GeoGebra har et utall mulige bruksområder, og jeg ser her bare på bruksområder jeg mener er relevante for matematikkopplæringen i videregående skole. Begge verktøy kan brukes til å tegne grafer, både ved å gi et funksjonsuttrykk eller ved å legge inn punkter i en tabell, for så å tegne grafer ut fra disse. Både grafiske kalkulatorer og GeoGebra har kommandoer for å finne ønskede verdier knyttet til disse grafene, slik som toppunkt, bunnpunkt, nullpunkt eller skjæringspunkter. En forskjell er likevel at slike handlinger er noe mer intuitive i GeoGebra, og at en stor dataskjerm naturlig nok gir et bedre bilde av grafene enn en kalkulator med lav oppløsning. Et eksempel er en oppgave hvor man skal finne nullpunktet til en graf. I GeoGebra kan man da skrive kommandoen «Nullpunkt», og angi hvilken graf man ønsker å finne nullpunktet til. På en grafisk kalkulator krever dette flere tastetrykk, og man er avhengig av å kjenne tastetrykkenes rekkefølge for å finne riktig kommando. Det er likevel grunn til å tro at disse forskjellene ikke spiller stor rolle for elever som tar det mest avanserte kurset på videregående skole. De aller fleste av disse kjenner framgangsmåtene for arbeid med grafer, enten de bruker grafisk kalkulator eller GeoGebra.

I tillegg til å arbeide med grafer, kan en grafisk kalkulator brukes til regresjon, likningsløsing og utregninger knyttet til kvadratrøtter, trigonometriske uttrykk og liknende. GeoGebra kan, etter de siste oppdateringene, også brukes til regresjon. Programmet egner seg godt til grafisk løsning av likninger, men er noe tungvint i bruk når det kommer til å gjøre enkle utregninger. Derfor har gjerne elever som bruker GeoGebra en enkel kalkulator i tillegg. Den store forskjellen mellom hjelpemidlene er GeoGebras dynamiske side. Den gjør det vesentlig lettere å utforske funksjoner og geometriske objekter, siden man kan endre den grafiske representasjonen ved å «dra» i den, noe som fører til en automatisk oppdatering av det algebraiske uttrykket. Denne muligheten er, slik jeg ser det, først og fremst et stort pedagogisk fortrinn, men kan i noen tilfeller også være til nytte i oppgaveløsing.

Det er flere grunner til at jeg lot elevene i min testklasse bruke GeoGebra i arbeidet med oppgaver fra TIMMS Advanced. Hovedårsaken er at elevene var vant til å bruke det i undervisningen, og en prøvesituasjon med grafisk kalkulator ville vært helt ukjent for dem. Videre vurderte jeg oppgavene i prøven, og kom fram til at det ikke ville være noen fordel å bruke GeoGebra heller enn grafisk kalkulator, og vice versa. Ingen av oppgavene var av en slik art at det dynamiske fortrinnet til GeoGebra ville spille noen rolle. Enkelte av oppgavene kunne løses med bestemte teknikker i de respektive hjelpemidlene, og etter mitt skjønn er elevene godt kjent med hvordan disse teknikkene utføres i sitt hjelpemiddel.

2.3 Forskjeller mellom 3MX og R2

En annen viktig forskjell mellom elevene som deltok i TIMSS Advanced 2008 og mine testelever, er at undervisningen har foregått etter to ulike læreplaner. Elevene fra TIMSS Advanced gikk 3MX, som var det mest avanserte matematikkurset under læreplanen R94. Min testgruppe var elever på R2, det tilsvarende kurset etter den nye læreplanen LK06. En av de største forskjellene mellom kursene er at temaet sannsynlighetsregning og statistikk er tonet ned i R2 i forhold til 3MX. I stedet har differensiallikninger blitt inkludert i læreplanen, et emne som ikke var inneholdt i 3MX. En annen endring er at R2 legger noe mindre vekt på matematikkens historie enn 3MX, men noe mer på matematiske bevis. For mer utfyllende informasjon om kursene viser jeg til læreplanene for henholdsvis 3MX (KUF, 2000) og R2 (Utdanningsdirektoratet, 2006b).

I tillegg til enkelte endringer i det faglige innholdet, blir bruk av digitale hjelpemidler klarere vektlagt i R2. Dette kommer jeg nærmere inn på i kapittel 3.3, der jeg beskriver utviklingen i bruken av kalkulator og PC i norsk matematikkundervisning. I sum vurderer jeg endringene i det faglige innholdet til å ha liten betydning for mine undersøkelser. Hverken sannsynlighetsregning, statistikk eller differensiallikninger er representert i prøven jeg har satt sammen. Min test inneholder hovedsakelig oppgaver knyttet til emnene funksjoner og likninger, og innenfor disse temaene er det kun små forskjeller mellom de to læreplanene. For de oppgavene der det er relevant, blir dette kommentert i kapittel 5.

3 Teori

For å kunne belyse forskningsspørsmålene, er vi avhengige av et bredt teoretisk rammeverk. I dette kapittelet ser jeg derfor først på hva pedagogisk og fagdidaktisk litteratur sier om kunnskap og forståelse i matematikk, før jeg tar for meg konsekvensene dette har hatt for norsk matematikkundervisning. Videre redegjør jeg for utviklingen kalkulator og PC har hatt med tanke på bruk i skolen, og gir en oversikt over sentral forskning knyttet til disse verktøyene i matematikkundervisningen. Avslutningsvis presenterer jeg teorier om egenskaper ved ulike oppgavetyper, og ser disse egenskapene i sammenheng med bruk av digitale hjelpemidler.

3.1 Kunnskap og forståelse i matematikk

Ulike læringsteorier har preget undervisningen i løpet av 1900-tallet og fram til i dag, både i Norge og internasjonalt. Jeg vil begynne med filosofen og pedagogen John Dewey, som var blant de første til å legge vekt på individets aktive medvirkning i læringsprosessen. Dewey mente man ikke lærte av å bli påvirket av ytre stimulering, noe som sto i strid med det behavioristiske læringssynet (Imsen, 2005) Begrepet «learning by doing» har blitt hengende igjen etter Dewey, et begrep vi også finner igjen i det konstruktivistiske læringssynet. Jean Piaget er en av de mest kjente representantene for konstruktivisme, som i tillegg til å være teori om hvordan læring skjer, også er en epistemologisk teori. Piagets teorier ligger til grunn for den kognitive konstruktivismen, som kjennetegnes av at den betrakter læring som et individuelt anliggende. Begrepet kognitiv rommer elementer som læring, hukommelse, tenkning og problemløsning, det vi kan kalle de intellektuelle funksjonene. Sentral i teorien er det vi kaller kognitive skjema, som kan beskrives som mentale referanserammer dannet gjennom handling og utforsking. Disse skjemaene møter stadig nye inntrykk. Noe passer med de allerede eksisterende skjemaene, mens annet kan føre til en endring i de indre representasjonene. Det første tilfellet kaller vi assimilasjon, nye fenomener tilpasses gamle skjema, mens det andre kalles akkommodasjon. Akkommodasjonsprosessen er det vi definerer som læring, en prosess der elevene i møte med omgivelsene forandrer sine mentale oppfatninger for å tilpasse dem til de nye inntrykkene. Endringer i skjema gjør at individet kan se sammenhenger med andre skjema, og danne det vi kaller en kognitiv struktur. Nettopp denne typen forandring av kognitive skjema utgjør utviklingen mot høyere nivåer i tenkningen (Imsen, 2005). Inntrykk som fører til endringer i skjema kan komme fra digitale hjelpemidler, noe jeg ser nærmere på i kapittel 2.4.

Fra Piaget har vi også definert to kunnskapstyper, kalt figurativ og operativ kunnskap. Solvang (1992) definerer figurativ kunnskap slik:

> At en elev har utviklet figurativ kunnskap, betyr at han har utviklet et skjema der bare kunnskapens ytre trekk er med (Solvang, 1992, s. 90).

Solvang og Mellin-Olsen (1978) peker på at denne typen mekanisk kunnskap er vanlig i matematikk, blant annet gjennom at elevene bruker formler uten å kjenne bakgrunnen for dem. Operativ kunnskap er på sin side et resultat av logisk-matematisk læring, som framkommer gjennom assimilasjon og akkommodasjon. Denne typen kunnskap er knyttet til de mentale skjemaene, og med det gjort varig for individet. Disse begrepene knytter seg nært opp mot det vi kaller instrumentell og relasjonell forståelse i matematikk. Richard Skemp definerte begrepene i artikkelen «Relational Understanding and Instrumental Understanding» (1976), men ble noen år tidligere introdusert for dem av den norske matematikkdidaktikeren Stieg Mellin-Olsen. Relasjonsforståelse er det som av de fleste blir regnet som forståelse, nemlig det å vite hva man skal gjøre og *hvorfor* man gjør det. Instrumentell forståelse i matematiske situasjoner blir av Skemp definert som å gjenkjenne en oppgave som en av en bestemt oppgavetype hvor man allerede kjenner en regel som kan brukes. For å illustrere dette bruker Skemp (1976) et eksempel hvor elevene skal arbeide med areal av rektangler. Elevene lærer seg formelen for arealet, bruker den på et antall oppgaver og får riktige svar. Dersom elevene bruker formelen uten å knytte den til logiske sammenhenger, sier vi at de har instrumentell forståelse. Undersøkelser tyder på at norske elever i for stor grad har en instrumentell bruk av digitale hjelpemidler (Grønmo et al., 2010), noe som kan hindre utviklingen av relasjonsforståelse.

Kritikken mot Piagets teorier gikk hovedsakelig på at språkets betydning ble undervurdert, og at det ikke ble lagt vekt på det sosiale samspillet mellom individene (Imsen, 2005). Som en følge av dette tok den sosiokulturelle læringsteorien over som det ledende læringssynet i løpet av 1980-årene. Den viktigste representanten for den sosiokulturelle læringsmodellen er den russiske psykologen Lev Vygotsky. Han bygget videre på Piagets teorier, men la vekt på den nære sammenhengen mellom kognitiv og sosial utvikling (Hals, 2010). Et viktig begrep i Vygotskys teori er *den proksimale utviklingssonen*. Sonen blir beskrevet som forskjellen mellom det individet kan klare alene, og det individet kan klare med hjelp og støtte fra andre (Imsen, 2005). For å utvikle forståelse og kunnskap er det derfor viktig med hjelp fra voksne og elever som kan mer enn en selv. Säljö (2002) støtter seg til Vygotskys prinsipper når han beskriver læring som noe som skjer over tre stadier. Det første er et innledende stadium der en trenger hjelp for å beherske en ferdighet. På det andre stadiet har eleven en viss kontroll, men trenger fortsatt videre veiledning. Det tredje og avsluttende stadiet oppnås når oppgaven kan utføres uten støtte utenfra. Säljö sier at denne støtten ikke trenger å være en lærer eller medelev, og åpner med dette for støtte fra verktøy som kalkulator eller PC. Vygotskys læringssyn støtter opp under prinsippet som tilpasset opplæring, og understreker hvor viktig det er at eleven får utfordringer som ligger på riktig nivå. Med riktig nivå menes her et nivå som ligger noe over det eleven allerede behersker, men ikke høyere enn at vedkommende kan klare å nå det nye nivået med riktig veiledning. Nettopp i denne vurderingen ligger utfordringen lærere møter daglig i skolen, siden det er umulig å forutse elevenes forståelse på forhånd (Imsen, 2005).

Forskningen har likevel bidratt med perspektiver som kan hjelpe lærerne i denne løpende vurderingen, og Johan Lithner er blant dem som har tatt for seg en annen side av forståelse i matematikk. Gjennom å se på hvordan studenter resonnerer i møte med ulike oppgaver, har han delt resonnementene inn i tre kategorier. *Plausible reasoning* blir definert ved at metoden:

> (i) is founded on intrinsic mathematical properties of the components involved in the reasoning, and
>
> (ii) is meant to guide towards what probably is the truth, without necessarily having to be complete or correct. (Lithner, 2003, s. 33)

Metoden kjennetegnes altså av at man bruker de underliggende egenskapene til matematiske begreper i resonnementet, en metode som langt på vei er umulig uten relasjonell forståelse. Begrepet plausible reasoning har Lithner hentet fra Pólya, som bruker det for å skille mellom kvalifiserte gjetninger og mindre kvalifiserte gjetninger. Den andre kategorien, *established experiences*, definerer Lithner slik:

> (i) is founded on notions and procedures established on the basis of the individual's previous experiences from the learning environment, and
>
> (ii) is meant to guide towards what probably is the truth, without necessarily having to be complete or correct. (Lithner, 2003, s. 34)

En slik framgangsmåte baserer seg på å overføre og kombinere løsningsmetoder kjent fra lignende situasjoner, gjerne på bakgrunn av ytre likheter i oppgavene. Metoden må likevel ikke forveksles med enklere veivalg, slik som å pugge en bestemt algoritme for bestemte oppgavetyper. Den type framgangsmåter faller inn under den tredje kategorien, som Lithner kaller *identification of similarities.* Metoden kjennetegnes av følgende punkter:

> (i) The strategy choice is founded on identifying similar surface properties in an example, theorem, rule, or some other situation described earlier in the text.
>
> (ii) The strategy implementation is carried through by mimicking the procedure from the identified situation. (Lithner, 2003, s. 35)

Som et eksempel på disse tre kategoriene bruker Lithner en oppgave der man blir gitt et funksjonsuttrykk, og skal finne funksjonens maksimumsverdi. En elev som støtter seg til plausible reasoning kan da tenke: «Maksimumsverdien finner vi på toppunktet til den tilhørende grafen. Der er stigningstallet til tangenten, beskrevet av den deriverte, lik null, så oppgaven kan løses ved å finne hvor $f\,'(x) = 0$.» En elev som benytter seg av established experiences vil ikke legge det samme matematiske resonnementet til grunn for sitt valg av løsningsmetode: «Løsningen til de fleste oppgaver med maksimumsverdier har jeg funnet ved å løse $f\,'(x) = 0$.» Identification of similarities vil på sin side dreie seg om å finne et eksempel eller en regel i boka som ligner på det gitte funksjonsuttrykket, for så å følge samme framgangsmåte som i eksempelet. I dagens digitale skolehverdag kan et eksempel på identification of similarities være at elevene lærer seg en løsningsalgoritme med digitale hjelpemidler for en bestemt type oppgaver, uten å forstå bakgrunnen for løsningene.

Lithner påpeker likevel at de to siste kategoriene ikke er ubrukbare, men tvert imot kan være hensiktsmessige i visse tilfeller. Dette stemmer overens med tanker fra Pólya (1945, ref. i Lithner, 2003) som beskriver en lignende framgangsmåte under overskriften «Do I know a related problem?» Problemet oppstår idet disse to strategiene blir de eneste elevene bruker, noe Lithner viser til at ofte er tilfellet. Hvis identification of similarities er dominerende i elevens læringsaktiviteter, vil vedkommende få liten innsikt i de fundamentale matematiske ideene, og følgelig få problemer med å resonnere fornuftig i møte med ikke-trivielle oppgaver (Lithner, 2003). Schoenfeld (1985, ref. i Lithner, 2003) konkluderte med at dette kunne være et produkt av overdrevent fokus på prestasjoner i undervisningen:

> The data suggest that many of the counterproductive behaviors we see in students are learned as unintended by-products of their mathematics instruction. A very strong

> classroom emphasis on performance – on memorizing constructions and practicing them until they can be performed with a very high degree of accuracy – ultimately results in the students losing sight of the rational reasons for the correctness of those constructions (s. 54).

Denne konklusjonen harmonerer med det John Hattie kategoriserer som et av sine viktigste funn etter å ha gransket resultater fra en omfattende mengde forskningsarbeider:

> School leaders and teachers need to create school, staffroom and classroom environment where error is welcomed, and where participants can feel safe to learn, re-learn, and explore knowledge and understanding. (Hattie, 2009, s. 239)

Disse funnene understreker viktigheten av at elevene får muligheten til å utforske innholdet i matematikkundervisningen, mens Vygotsky påpekte betydningen av samspillet mellom læreren og elevene. Før vi skal se på hvordan dette har påvirket norsk skole, vil jeg avslutte denne sekvensen med noe så upedagogisk som å la Hattie fastslå hva som *ikke* er god undervisning:

> Effective teaching is not the drilling and trilling to the less than willing. (Hattie, 2009, s. 25)

3.2 Matematikkundervisning i norsk skole

Selv om matematikkdidaktikk er en forholdsvis ny disiplin (Gjone, 2001), har diskusjonen om ulike undervisningsformer lang tradisjon i Norge. Allerede i Normalplanen av 1938 ble betydningen av elevaktivitet vektlagt, samtidig som verdien av automatiserte basisferdigheter ble understreket (Hals, 2010). Det samme ble trukket fram i rapporten til Grønmo, Onstad og Pedersen (2010) etter TIMSS Advanced i 2008, noe som forteller litt om utfordringene som fortsatt ligger i undervisningen. Med teorien fra forrige delkapittel i bakhodet, skal vi nå se på hva som har kjennetegnet matematikkundervisningen i Norge i de siste årene.

I den norske skolen forholder man seg i dag til læreplanen fra 2006, kalt Kunnskapsløftet (LK06). Før det jobbet man etter Reform 94 (R94), og det er naturlig å ta med elementer fra begge disse læreplanene i denne oppgaven. TIMSS Advanced ble gjennomført i 2007, så deltakerne hadde i all hovedsak blitt undervist i tråd med R94. Denne læreplanen inneholdt begrepet «ansvar for egen læring», som har vært gjenstand for diskusjon i ettertid. Det blir hevdet fra flere hold at dette har ført til en mer tilbaketrukket lærerrolle (Hals, 2010; Klette, 2008), som kombinert med en utstrakt bruk av arbeidsplaner har ført til et lavt læringstrykk

(Bergem, 2008; Botten, 2005). Disse synspunktene underbygges av funn i TIMSS Advanced, der både elever og lærere har blitt spurt om hvor ofte ulike arbeidsmåter forekommer i matematikktimene. Rundt 80 prosent av både elever og lærere oppgir at de «Løser oppgaver som likner på eksempler i læreboka» i omtrent halvparten av timene eller oftere (Grønmo et al., 2010). I seg selv er ikke dette bemerkelsesverdig, all den tid alle referanselandene bruker mye tid på denne arbeidsmåten. Spesielt for Norge er det at denne arbeidsmåten peker seg ut som den *eneste* som forekommer i halvparten av timene eller oftere, noe som også ble bemerket i den internasjonale rapporten fra undersøkelsen (Mullis et al., 2009). Norge ligger langt under det internasjonale gjennomsnittet på å «Diskutere strategier for problemløsing» og å «Diskutere resonnementene våre». Vi bruker også mindre tid på å «Lære formler og framgangsmåter utenat», noe som også var tilfellet i TIMSS-undersøkelsen i grunnskolen (Grønmo & Onstad, 2009).

Dette er problematisk på flere områder. For det første trekkes de nevnte arbeidsmetodene som innebærer diskusjon fram som spesielt viktige for at elever skal utvikle gode begreper og strategier for problemløsning. Som vi skal se senere i oppgaven har norske elever til dels store problemer med oppgaver som stiller krav til slike egenskaper. For det andre kan manglende variasjon i undervisningen virke demotiverende på elevene, noe som i seg selv vil være hemmende for deres utvikling. Dette påpekes blant annet i forordet til Kunnskapsløftet: «Motivasjonen og lysta til å lære kan vere avgjerande for om ein lykkast eller ikkje. Derfor må elevane oppmuntrast til aktiv deltaking i sitt og andres læringsarbeid.» (KD, 2006b, s. 3). Vi må likevel ikke ledes til å tro at aktivitet i seg selv fører til indre motivasjon og dermed bedre læring i matematikk (Botten, 2005). Dette illustrerer Imsen gjennom et sitat hentet fra en jente som var med i et forsøk der mer livsnære og praktiske regneoppgaver ble utprøvd: «Nå vil jeg ikke være med på denne lekematematikken lenger. Nå vil jeg ha skikkelig matematikk slik som de andre klassene har. Det blir jo ingenting av dette her.» (Mellin-Olsen, 1977, ref. i Imsen, 2005, s. 133).

Med tanke på Vygotskys teorier om språket og det sosiale samspillets betydning for læring, framstår det som noe underlig at vi i norsk matematikkundervisning har en såpass stor overvekt av individuelle arbeidsmåter. Hals (2010) peker på at dette kan skyldes at man i for stor grad har sett på individualisering som tilpasset opplæring, og at det har gått ut over det vi kan kalle fellesskapsundervisning. Grønmo og Onstad (2009) viser til at kritikken mot ensidig bruk av såkalt kateterundervisning også kan ha ført til at individuelt arbeid har fått stor plass.

Kritikken mot lærersentrert undervisning har blant annet gått på at den fører til en passiv elevrolle, mens det nå kan se ut til at pendelen har svingt motsatt vei, og ledet til en for tilbaketrukket lærerrolle. Stilt opp mot sosiokulturell læringsteori, hvor deltakelse og kommunikasjon er stikkord, kan dette synes problematisk. Sfard (2006, ref. i Grønmo et al., 2010) framhever betydningen av at læreren er personen som relaterer kommunikasjonen i klasserommet til det som regnes som anerkjente matematiske begreper, noe som understreker viktigheten av læreren som en tydelig leder. Dette synet får støtte av Hattie, som nevner læreren i samtlige av sine seks viktigste funn, hvorav de to første lyder slik:

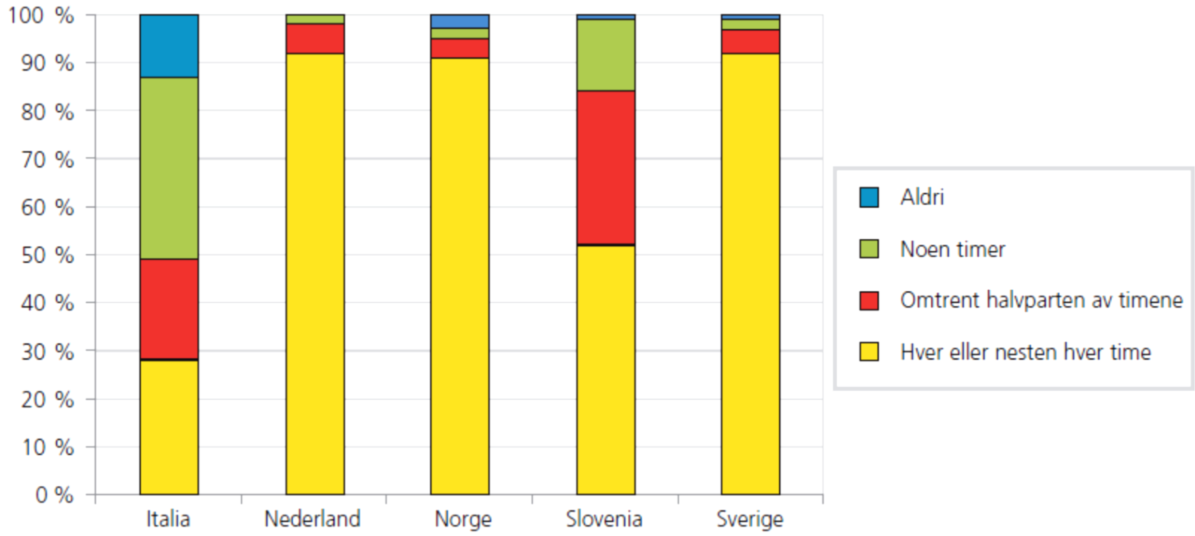
> 1. Teachers are among the most powerful influences in learning.
>
> 2. Teachers need to be directive, influential, caring, and actively engaged in the passion of teaching and learning. (Hattie, 2009, s. 238).

Med tanke på de norske resultatene i internasjonale undersøkelser de siste årene, kombinert med viktige fagpersoners og forskeres syn på matematikkundervisning gjengitt her, er det grunn til å tro at undervisningspraksisen igjen vil endre seg. En tydelig endring som trådte i kraft med Kunnskapsløftet, var endringen av eksamensordning. Under Reform 94 fikk elevene anledning til å bruke formelsamlinger, egne notater og avansert kalkulator under hele eksamen. Dette førte til at elevene så mindre behov for å lære definisjoner, formler og teknikker utenat, siden de uansett kunne ha med seg alle tenkelige hjelpemidler til prøver (Grønmo et al., 2010). I LK06 ble eksamen todelt, der del 1 skal gjennomføres uten andre hjelpemidler enn skrivesaker, linjal og passer, mens alle hjelpemidler bortsett fra de som innebærer kommunikasjon er tillatt på del 2. Dette må nødvendigvis ses på som økt vektlegging av de grunnleggende ferdighetene i matematikk, som igjen vil virke styrende på undervisningen. Et annet element som kom med full tyngde gjennom LK06 var fokuset på «å kunne bruke digitale verktøy», som nå regnes blant de fem grunnleggende ferdighetene, sammen med «å kunne regne», «å kunne lese», «å kunne uttrykke seg muntlig» og «å kunne uttrykke seg skriftlig». Dette er sentralt i min oppgave, og noe vi skal se nærmere på i det følgende.

3.3 Bruk av kalkulator og PC i norsk matematikkundervisning

Bruk av kalkulator og PC kom inn i norsk matematikkundervisning på 1980-tallet, blant annet ved at datalære var et av hovedemnene i Mønsterplanen fra 1987 (Fuglestad, 2009). Også i læreplanen fra 1997 var både kalkulatorer og datamaskiner omtalt, men det er først litt ut på

2000-tallet at datamaskiner har blitt brukt mer jevnlig i matematikkundervisningen. I «Skolens digitale tilstand 2009» (Kløvstad, 2009) finner vi at 25,9 % av lærerne som underviser i andre trinn på videregående skole oppgir at de bruker datamaskin i matematikktimene ukentlig eller oftere. Dette er en økning fra tidligere undersøkelser, noe Kløvstad påpeker er naturlig, all den tid mange skoler utstyrte sine elever med bærbare datamaskiner fra skoleåret 2008/2009. Når det gjelder hyppighet i bruken av kalkulator blant elevene, får vi gode svar gjennom TIMSS Advanced. Over 90 % av elevene i Norge oppgir at de bruker kalkulator i så godt som alle matematikktimene på skolen. Vi ser av figur 1 at dette er omtrent på samme nivå som referanselandene Sverige og Nederland, men langt høyere enn Italia og Slovenia (Grønmo et al., 2010). Norge peker seg også ut, igjen sammen med Sverige og Nederland, som et land der så godt som alle elevene bruker grafisk kalkulator eller en såkalt symbolregner. Dette er nærmest fraværende hos de andre landene i undersøkelsen, der det mest vanlige er en avansert kalkulator uten graftegner.



Figur 1: Elevenes svar på hvor ofte de bruker kalkulator i matematikktimene i Norge og i referanselandene (Grønmo et al.*, 2010, s. 187).*

Hva bruker så de norske elevene kalkulatoren til? TIMSS Advanced forteller at å «tegne grafer til funksjoner» og å «løse likninger» er de mest vanlige bruksområdene. Hvis vi ser på læreplanen for 3MX finner vi to formuleringer som sier noe om bruk av kalkulator:

> 2c kunne bruke teknologiske verktøy i utforsking og problemløsing (...)
>
> 3c kunne bruke lommeregneren til å summere sekvenser av tall (KUF, 2000, s. 13-14)

Den første formuleringen åpner for bruk i de fleste sammenhenger. Ser vi den i sammenheng med de mest vanlige bruksområdene fra TIMSS Advanced, kan det se ut som kalkulatoren først og fremst brukes til funksjonsdrøfting og til å løse likninger.

Med Kunnskapsløftet kom flere formuleringer knyttet til bruk av digitale verktøy:

> *Å kunne bruke digitale verktøy* i matematikk handlar om å bruke slike verktøy til spel, utforsking, visualisering og publisering. Det handlar òg om å kjenne til, bruke og vurdere digitale hjelpemiddel til problemløysing, simulering og modellering. I tillegg er det viktig å finne informasjon, analysere, behandle og presentere data med høvelege hjelpemiddel, og vere kritisk til kjelder, analysar og resultat (KD, 2006b, s. 60-61).

I tillegg til dette finner vi i R1 og R2 flere kompetansemål som innebærer bruk av digitale verktøy:

R1: Mål for opplæringen er at elevens skal kunne:

- utføre og analysere konstruksjoner definert av rette linjer, trekanter og sirkler i planet, med og uten bruk av dynamisk programvare
- omforme og forenkle sammensatte rasjonale funksjoner og andre symbolske uttrykk med og uten bruk av digitale hjelpemidler
- tegne grafer til funksjoner med og uten digitale hjelpemidler, og tolke grunnleggende egenskaper til en funksjon ved hjelp av grafen (Utdanningsdirektoratet, 2006a)

R2: Mål for opplæringen er at eleven skal kunne:

- summere endelige rekker med og uten digitale hjelpemidler, utlede og bruke formlene for summen av de *n* første leddene i aritmetiske og geometriske rekker, og bruke dette til å løse praktiske problemer
- løse differensiallikninger og tegne retningsdiagrammer og integralkurver, og tolke dem ved å bruke digitale hjelpemidler (Utdanningsdirektoratet, 2006b)

Hovedforskjellen mellom R94 og LK06 er at mens man hadde *muligheten* til å bruke digitale hjelpemidler etter R94, blir det etter LK06 eksplisitt uttalt at man *skal* bruke det innen enkelte emner. En annen vesentlig forskjell er at dynamisk programvare som GeoGebra gjør det mulig å eksperimentere med geometriske figurer i langt større grad enn tidligere.

3.4 Hvorfor bruke kalkulator og PC i undervisningen?

Tidligere i dette kapittelet så vi at man kan ta sosiokulturell læringsteori til inntekt for å bruke redskaper som støtte for elevene i undervisningen. Persson (2009) trekker også fram dette i sin gjennomgang av litteratur knyttet til bruk av kalkulator:

> Calculators are in literature often explicitly placed in a context of *socio-cultural learning* through the concepts of *artefacts* and physical and psychological *mediating tools*, first described by Vygotsky (Persson, 2009, s. 54)

Mediating tools blir av Imsen (2005) forklart som verktøy som skal hjelpe brukeren opp på et høyere mentalt nivå, lenger ut i sin proksimale utviklingssone. Trouche (2004) hevder et redskap som kalkulator eller PC kan bli et nyttig instrument for eleven, gjennom det han kallen *instrumental genesis*. Denne prosessen involverer to deler, artefact og instrument. Et eksempel på det førstnevnte kan være en grafisk kalkulator, mens instrumentet ikke er noe som eksisterer i seg selv, men konstrueres mentalt hos eleven. For at dette skal bli et samspill som fremmer kunnskap og forståelse må eleven inneha både teknisk og matematisk kompetanse. Rossevatn (2006) påpeker at dette er i tråd med Lagranges tanker, som presiserer at det kreves mye trening før eleven er i stand til å utnytte et verktøy som grafisk kalkulator på en god måte.

Kognitive verktøy er en annen betegnelse som ofte brukes om grafisk kalkulator, symbolregnere og dynamisk programvare (Heid, ref. i Persson, 2009). Persson tar i bruk Reznichenko (2007) når han skal beskrive kalkulatoren som et kognitivt verktøy:

> They (1) support cognitive and meta-cognitive processes; (2) share cognitive load by providing support for lower level cognitive skills so that resources are left for higher order cognitive skills; (3) allow learners to engage in cognitive activities that otherwise would be unreachable for them; and (4) allow learners to generate and test hypotheses in the context of problem solving. (Persson, 2009, s. 55)

For at bruken av kalkulator skal bli fruktbar, trekker Rivera og Becker (2004) fram at assistanse fra andre personer er viktig. Deres funn tyder på at læring skjer gjennom samspillet mellom kalkulatoren som medierende verktøy og hjelp fra personer med høyere kompetanse enn en selv. Dette harmonerer med Hals' (2010) påstander om at læreren må framstå som en tydelig leder for at undervisning med hjelp av IKT skal ha best mulig effekt.

En annen forutsetning for at bruk av kalkulator og IKT skal kunne bidra til å fremme kunnskap og forståelse hos elevene, er at lærerne er villige til å tilpasse undervisningen til de nye hjelpemidlene (Persson, 2009; Trouche, 2005). Bennison og Goos (2010) forklarer at læreres ferdigheter og selvtillit knyttet til disse hjelpemidlene er avgjørende for hvor ofte og hvordan de benytter dem i undervisningen. Crisans undersøkelser underbygger dette:

> Practicing teachers are expected to incorporate ICT into their practices without real understanding of the benefits of doing so; they have to offer their pupils experiences of learning mathematics in an environment in which they had not necessarily experienced mathematics themselves (Crisan, 2007, ref. i Hals, 2010, s. 16).

Dersom undervisningen tilpasses de nye hjelpemidlene, hevder Geiger, Faragher og Goos (2010) at den mest signifikante endringen som vil oppstå er hvordan lærere og elever kommuniserer. Forfatterne mener teknologien kan skifte fokuset i klasserommet over til en mer elevsentrert, undersøkende undervisning, der de digitale hjelpemidlene danner grunnlaget for faglige diskusjoner. De understreker likevel at teknologien i seg selv ikke vil gjøre dette, og er tydelige på at læreren har en vital rolle med tanke på å lede diskusjonene i riktig retning.

Geiger, Faragher og Goos (2010) ser på hjelpemidlene som en katalysator for visualisering og høyere ordens tenkning. Dette kan sees i sammenheng med ulike representasjonsformer for kunnskap, som både Solvang (1992) og Duval (2006) trekker fram som sentralt for utviklingen av matematisk forståelse. Solvang (1992) definerer fire representasjonsformer:

1. Handlinger eller operasjoner. Her legger vi ofte grunnlaget for det induktive arbeidet.

2. Illustrasjoner eller bilder. Vi omtaler det ofte som ikonisering.

3. Symboler av matematisk art.

4. Verbalisering.

Duvals *representational registers* tilsvarer i stor grad Solvangs, og Duvals påstand er at forståelse i matematikk forutsetter at man kan koordinere minst to av disse representasjonsformene. Denne evnen til å skifte mellom representasjonsformer er nært tilknyttet sammenhengen mellom prosess og objekt i matematiske begreper. Vi kan se på et matematisk begrep som operasjonell prosess eller et strukturelt objekt, det som gjerne omtales som prosess-objekt-dualitet (Persson, 2009). Et eksempel på dette er funksjoner, som kan sees på som enten et sett av ordnede tallpar, eller en regneprosess som tar oss fra et system til et annet (Skemp, 1971, ref. i Sfard, 1991). Sfard definerer begrepet *reification*, som skjer i det øyeblikket hvor man klarer å se strukturen i regneprosessene man har utført, og gjøre prosessen om til et objekt:

> Reification is an instantaneous quantum leap: a process solidifies into object, into a static structure (Sfard, 1991, s. 20).

Evnen til å beherske begge sider ved et matematisk begrep sees på som svært viktig for avansert matematisk tenkning (Persson, 2009), og Geiger, Faragher og Goos (2010) hevder at kalkulator og IKT kan bidra til diskusjoner som styrker denne evnen hos elevene. De legger vekt på at læreren må stimulere til fokus på prosessen ved bruk av slike verktøy, siden elever gjerne fokuserer på å finne resultater. For resultatbasert bruk av kalkulator og IKT kan føre til at elevene bruker hjelpemidlene som «svarte bokser», det vil si verktøy som gir riktig svar uten at elevene trenger å tenke på hvorfor. Geiger, Faragher og Goos peker på at elever gjerne trenger en feilmelding eller lignende fra hjelpemidlene for å tvinges til å tenke, og at det er viktig at læreren gjenkjenner slike situasjoner og kan bruke dem konstruktivt.

For å oppsummere denne teoridelen skal vi ta med oss Perssons hypoteser om bruk av kalkulator, som han hevder støttes av forskning på området. Han presiserer likevel en nødvendig forutsetning for at disse hypotesene skal holde; nemlig at kalkulatoren «brukes på riktig måte».

> - Calculators are powerful computing and visualizing tools that enable students to try different solving methods and conjectures, without the burden of time-consuming, trivial activities like manual drawing or basic computing and simplification.
>
> - The use of calculators promotes students' understanding and forming of mathematical concepts, such as algebraic ones, by making it possible to experiment with these concepts and to see them in different representation forms.
>
> - There is no generally observed decline in students' manual or mental skills.
>
> - Students become more active in mathematical work and show a more positive attitude towards mathematics when they can use calculators (Persson, 2009, s. 51).

3.5 GeoGebra – dynamisk programvare

Denne delen av teorikapittelet baserer seg hovedsakelig på Sigbjørn Hals' masteroppgave «IKT i matematikkundervisningen – tidstjuv eller tryllemiddel?» (2010). Hals er mannen som oversatte GeoGebra til norsk, og han har også holdt en rekke kurs om programmet. GeoGebra er et eksempel på det vi gjerne kaller dynamisk programvare, et begrep vi definerte i innledningen. Det finnes andre tilsvarende programmer, som Cabri Geometry og GEONExT, men det er GeoGebra som har fått størst utbredelse i Norge. Den første utgaven av GeoGebra ble utgitt i 2002, og programmet kom i norsk språkdrakt i 2006.

Siden GeoGebra er forholdsvis nytt, har det blitt gjort relativt lite forskning på undervisning med programmet. Hals trekker fram en kvantitativ studie om bruk av digitale verktøy i Sverige, der lærerne blant annet vurderer hvor godt egnet ulike matematikkprogram var for undervisningen. Under ser vi tabellen hentet fra Balke og Hutts undersøkelse.

Tabell 1: Fordelingen av svar på hvor godt egnet svenske lærere mente ulike matematikkprogram var i undervisningen (Balke & Hutts, 2009, ref. i Hals, 2010, s. 34).

Svarsalternativ / Program	1 (Fungerar inte alls i undervisning)	2	3	4 (Fungerar utmärkt i undervisning)
MATLAB	25 (15,0%)	61 (36,5%)	62 (37,1%)	19 (11,4%)
GeoGebra	0 (0%)	13 (27,1%)	17 (35,4%)	18 (37,5%)
Cabri Geometry	4 (5,6%)	30 (41,7%)	27 (37,5%)	11 (15,3%)
Geom. Sketchpad	2 (15,4%)	1 (7,7%)	5 (38,5%)	5 (38,5%)
Derive	4 (2,5%)	71 (43,8%)	63 (38,9%)	24 (14,8%)
Mathematica	7 (11,1%)	22 (34,9%)	25 (39,7%)	9 (14,3%)
Ms Excel	14 (1,7%)	211 (25,0%)	386 (45,7%)	234 (27,7%)
Graphmatica	0 (0%)	15 (34,1%)	16 (36,4%)	13 (29,5%)

Vi ser at relativt få respondenter har uttalt seg om GeoGebra, så vi skal være forsiktige med å generalisere. Blant nesten 3000 matematikklærere i gymnasiet i Sverige hadde 13,7 % hørt om GeoGebra. Excel (89,3 %) og MATLAB (74,1 %) var de mest kjente programmene. Med en gjennomsnittsverdi på 3,10 er GeoGebra likevel det programmet som skårer best blant svenske lærere, når det er snakk om egnethet i undervisningen.

I Norge er GeoGebra langt mer kjent. Hals (2010) hadde over 300 respondenter i sin studie, der alle var lærere enten i 10. klasse eller i 1P/1T i den videregående opplæringen. Blant lærerne i 10. klasse oppgir 82 % at de har hørt om GeoGebra, mens den tilsvarende andelen blant lærere i videregående er 98 %. Blant sistnevnte gruppe oppgir 33 % at de er nokså erfarne eller svært erfarne brukere av GeoGebra. Studiet sier også noe om hvordan programmet blir brukt i undervisningen, og jeg gjengir her noen av hovedpunktene:

- Lærerne bruker oftere GeoGebra i timene enn elevene, men vi vet ikke noe om hvor lenge lærerne og elevene bruker programmet i hver økt.

- De lærerne som bruker GeoGebra, benytter oftest programmet til å vise elevene hvordan de kan løse bestemte oppgaver eller bruke ulike verktøy. De bruker i liten grad ferdige filer som andre har laget.
- Det er bare et lite mindretall av lærerne som lar elevene bruke GeoGebra til utforskende oppgaver en gang i måneden eller oftere.
- Det er mest av utforskende aktiviteter med GeoGebra i 1T, og minst i 10. klasse (Hals, 2010, s. 114-115).

I tillegg viser studien at 75 % av lærerne ikke har endret oppgavetyper etter at de tok i bruk matematisk programvare. Ser man dette i sammenheng med det andre og tredje punktet over, viser det at IKT ikke har endret fokuset i undervisningen i særlig grad. Det er likevel langt flere lærere som oppgir argumenter for bruk av matematisk programvare i undervisningen (200), enn det er lærere som gir argumenter mot (49). De vanligste grunnene lærerne oppga for å bruke matematisk programvare var:

- ✓ Det motiverer elevene.
- ✓ Læreplanen krever det.
- ✓ Det er godt egnet til visualisering, slik at elevene lettere ser sammenhenger.
- ✓ Det gir variasjon i undervisningen.
- ✓ Det øker forståelsen/læringsutbyttet.
- ✓ Det er nyttig/tidsbesparende på eksamen (Hals, 2010, s. 99).

Blant de som ikke valgte å bruke matematisk programvare i undervisningen, var dette grunnene som ble oftest nevnt:

- ✓ Tidspress.
- ✓ Det går med for mye tid i forhold til nytteverdien.
- ✓ Jeg er usikker på bruken av programmet/utstyret.
- ✓ Noen elever er på div. nettsteder i stedet for å jobbe med matematikk.
- ✓ Det har lite med matematikk å gjøre. Lite læringsutbytte.
- ✓ For få maskiner i klasserommet (Hals, 2010, s. 99).

Argumentene er altså i all hovedsak rettet mot elevene, og hva lærerne vurderer som best for elevenes læring.

Et annet interessant spørsmål er hvorvidt GeoGebra bidrar til faglig utvikling hos alle typer elever. Her får vi svar fra en doktorgradsundersøkelse utført av Iranzos (2009, ref. i Hals, 2010), som delte en gruppe på 12 elever inn i tre undergrupper etter hvor sikre og selvstendige de var i matematikk. Gruppene ble kalt usikre, trygge og selvstendige. Gjennom fire timers observasjonsmateriale fant Iranzos at evnen til å visualisere ble styrket hos alle elevene, mens evnen til deduksjon kun ble forbedret i gruppen med selvstendige elever.

3.6 Teori om oppgavetyper

Til slutt i dette kapittelet skal vi se på to teorier om oppgavetyper, knyttet til bruk av teknologi. Brown (2009) har tatt for seg oppgaver brukt på eksamener i Australia, og analysert disse med tanke på muligheten for å bruke grafisk kalkulator. Han deler oppgavene inn i to hovedgrupper, som igjen består av to undergrupper. Den første hovedgruppen kaller Brown *inactive*, og brukes om oppgaver der kalkulatoren ikke kan spille noen rolle. Inactive deles inn i to undergrupper, *excluded* og *neutral*. Excluded innebærer at oppgavens ordlyd utelukker bruk av kalkulator direkte i løsningen. Eksempler på en slik ordlyd kan være «vis ved regning at..» eller «vis utregningen». Dersom oppgaven hadde vært strukturert annerledes, ville kalkulatoren potensielt vært til stor hjelp i løsningen. Oppgaver klassifiseres som neutral dersom en grafisk kalkulator ikke på noen måte kan bidra i løsningen. Den andre hovedgruppen, *active*, deles inn i *optional* og *required*. Optional innebærer at en grafisk kalkulator kan bidra til å løse oppgaven, men den er ikke nødvendig for å løse den. Hvis en oppgave er required, kan den derimot ikke løses tilfredsstillende uten å bruke grafisk kalkulator. Dette kan være oppgaver som enten er umulig for elevene å løse for hånd, eller der en løsning uten kalkulatoren bare gir begrenset poenguttelling. Browns undersøkelser i Australia viste at det i eksamener fra 2000 til 2006 var flest oppgaver i kategorien excluded, og færrest i required. Monaghan (2000) bidrar med en naturlig forklaring på dette:

> ..is easier to write questions which bypass the technology than it is to write questions which embrace it ... natural technology enhanced questions are not immediately obvious (ref. i Brown, 2009, s. 259).

Drijvers (2009) har tatt for seg eksamensformene i ulike europeiske land, med tanke på hvordan digitale hjelpemidler kan brukes. Mens Brown hadde fokus på selve oppgavene, er Drijvers overordnede fokus på selve eksamensformen, og om teknologi er tillatt eller ikke. Drijvers deler også inn mulighetene for bruk av teknologi i fire grupper:

- Not allowed. Dette innebærer et forbud mot digitale hjelpemidler (men bruk av enkel kalkulator ligger i denne gruppen)
- Allowed. Digitale hjelpemidler er lov, men oppgavene er laget slik at det ikke er nyttig å bruke dem.
- Recommended. Digitale hjelpemidler er lov og kan være til hjelp, men blir ikke belønnet.
- Required. Digitale hjelpemidler er lov, og bruk av dem blir belønnet.

Vi ser at gruppene i stor grad stemmer overens med Brown sine, selv om Drijvers ikke fokuserer spesifikt på oppgavetyper. I min studie har deres kategoriseringer vært sentrale i arbeidet med klassifisering og utvelgelse av oppgaver, noe jeg kommer tilbake til i neste kapittel. Trekk fra deres fire oppgavegrupper blir også brukt i resultatkapittelet, der jeg kommenterer hvordan digitale hjelpemidler kunne vært brukt på de ulike oppgavene.

4 Metode

I dette kapittelet presenterer jeg metodene jeg har brukt i denne studien. Jeg forklarer først hvorfor jeg valgte intervju for å innhente data, og beskriver så hvordan mine tre utvalg ble konstruert. I kapittel 4.3 gir jeg innblikk i studiens gjennomføring, og argumenterer for valg jeg har tatt underveis.

4.1 Kvantitativ og kvalitativ metode

Utgangspunktet for min studie var rapporten fra TIMSS Advanced 2008 (Grønmo et al., 2010), der jeg fattet interesse for forskjellen på de norske resultatene på oppgaver med triggerord, kontra lignende oppgaver uten triggerord. Forfatterne beskrev en norsk bruk av kalkulator, men presiserte at undersøkelsene ikke ga grunnlag for å si mye om hvordan norske elever bruker hjelpemiddelet. Dette ble tema for mine undersøkelser, og jeg fikk tilgang til de dataene jeg ønsket fra TIMSS Advanced 2008. Tidlig i prosessen fikk jeg altså et bredt spekter av kvantitative data knyttet til elevenes svar på oppgaver.

For å kunne besvare mine problemstillinger var det nødvendig å få innblikk i hvordan elever tenker i møte med oppgaver. Vi kan tolke og forstå mye gjennom å analysere oppgaver og elevers besvarelser, men for å få en mer inngående forståelse mener jeg vi er avhengige av å la elevene fortelle og forklare selv. Jeg ville derfor gjennomføre intervjuer med et antall elever, der de kunne forklare tankegangen bak løsningsmetodene. Gjennom dette var målet å sitte igjen med kvalitative data, som kombinert med kvantitative data fra TIMSS Advanced 2008 kunne gi innsikt i hvordan norske elever bruker digitale hjelpemidler. I arbeidet har jeg gjort tre utvalg, ett knyttet til oppgaver fra TIMSS Advanced 2008 og to knyttet til elever på tredje trinn i videregående skole.

4.2 Tre utvalg

4.2.1 Oppgaveutvalg

Samtlige oppgaver fra TIMMS Advanced 2008 ble nøye vurdert, for å finne et utvalg som kunne si noe om elevenes hjelpemiddelbruk. Browns (2009) og Drijvers (2009) fire oppgavetyper knyttet til bruk av hjelpemidler var en sentral rettesnor i dette arbeidet. Oppgaver som inneholdt triggerord var spesielt interessante, både de som lå til rette for hjelpemiddelbruk og de der triggerordene var mer villedende enn veiledende. Siden oppgavene skulle brukes til en test i en skoleklasse, var det viktig at omfanget ikke ble større enn at testen kunne gjennomføres i en vanlig matematikkøkt. Til slutt endte jeg opp med et utvalg på 10 oppgaver, der digitale hjelpemidler kunne bidra til løsningen på 9 av dem. Den siste oppgaven (oppgave 8), krevde et resonnement knyttet til grafer og derivasjon, og ble valgt av to grunner. For det første handlet den opplagt om grafer, og det var interessant å se om dette kunne lede noen elever til å bruke hjelpemidler, selv om det ville være nytteløst. For det andre kunne oppgaven gi innsikt i elevenes forståelse av grafer, som var sentralt for å kunne bruke hjelpemidlene godt på de andre 9 oppgavene. 7 av oppgavene inneholdt triggerord, og det varierte hvor tydelig det var at digitale verktøy kunne være til hjelp.

4.2.2 Utvalg av elever til test

Testen ble gjennomført på en klasse som tok kurset R2. Dette var et naturlig valg, siden det er det mest avanserte matematikkurset i videregående skole, og med det tilsvarer 3MX fra TIMSS Advanced 2008. For mer om R2 og 3MX henviser jeg til kapittel 2.3. På grunn av tidsrammene for min oppgave valgte jeg klasse gjennom personlig kjennskap til læreren. Dette gjorde at jeg raskt kom i gang med undersøkelsene, noe som var viktig for å kunne fullføre på normert tid. Utvalget til testen kan altså kalles et bekvemmelighetsutvalg. Klassen besto av 19 elever, hvorav 17 var til stede da testen ble gjennomført.

4.2.3 Utvalg av elever til intervju

Det viktigste formålet med testen var å gjøre meg i stand til å velge elever til intervju. Elevene skulle dekke et bredt spekter, med tanke på hjelpemiddelbruk og resultater på testen. Besvarelsene fra testen ble nøye vurdert, og fem elever ble valgt ut til intervju. Jeg ønsket to elever som hadde levert gode resultater, med henholdsvis lite og hyppig bruk av hjelpemidler. De tre andre skulle variere mer, både med tanke på resultater og hjelpemiddelbruk. To av elevene deltok i pilotintervju, mens de tre andre deltok i vanlige intervju. I sum mener jeg informantene dekker et forholdsvis bredt spekter av ferdigheter og holdninger når det gjelder hjelpemiddelbruk og matematikk.

4.3 Gjennomføring

4.3.1 Test i klasse

Etter å ha analysert og vurdert oppgaver fra TIMSS Advanced 2008, satt jeg igjen med en test bestående av 10 oppgaver. Denne ble gjennomført i en vanlig matematikktime i den aktuelle gruppens klasserom. Elevene fikk instruks om å forklare alle svar, selv om oppgaven bare krevde ring rundt valgt svaralternativ. De fikk en time på testen, noe som tilsvarer seks minutter per oppgave. Dette er dobbelt så mye som elevene i TIMSS Advanced 2008, som hadde 30 oppgaver på 90 minutter, altså tre minutter per oppgave. Valget om ekstra tid ble tatt hovedsakelig for at elevene skulle få tid til å forklare svarene sine. I tillegg var tanken at litt ekstra tid kunne føre til mer kreativ hjelpemiddelbruk blant enkelte elever, noe som var et sentralt punkt i mine undersøkelser. Som følge av dette opplevde elevene at de hadde god tid på testen. Jeg ser ikke på forskjellene i tid per oppgave som noe stort problem for min studie, siden jeg ikke har noe mål om å sammenligne resultater fra testklassen med de fra TIMSS Advanced. I kapittel 5 oppgir jeg likevel resultatene fra begge gruppene. Dette blir gjort først og fremst for å vise fordelingen mellom svar med og uten bruk av hjelpemidler, og for å gi innsikt i oppgavens vanskelighetsgrad.

Selv om testen hovedsakelig ble brukt til å velge ut elever til intervju, analyserte jeg resultater og framgangsmåter på hver enkelt oppgave. Svarene ble delt inn i fem grupper: riktig svar med hjelpemidler, riktig svar uten hjelpemidler, feil svar med hjelpemidler, feil svar uten hjelpemidler og ikke svart. Selv om utvalget av elever til test ikke er representativt, mener jeg fordelingen mellom disse gruppene er relevant informasjon for min problemstilling, og har derfor valgt å ta den med i oppgaven.

4.3.2 Intervju

Fem elever ble valgt ut til intervju, hvorav de to første fikk status som pilotintervju. Hensikten med pilotintervjuene var å teste intervjuguiden jeg hadde utarbeidet, samt å gjøre meg tryggere i intervjusituasjon. I ettertid viste det seg at det første av disse pilotintervjuene var såpass interessant at jeg valgte å innlemme det i datamaterialet. Intervjuene var semistrukturerte; jeg ønsket en viss struktur i intervjuet, men hadde også muligheten til å gå dypere inn i tema som dukket opp underveis. Første del av intervjuene besto av en gjennomgang av testen, oppgave for oppgave. For hver oppgave ble eleven først bedt om å forklare hva han hadde gjort for å komme fram til svaret, for så å utdype hvorfor han valgte å bruke, eventuelt ikke bruke, digitale hjelpemidler. Andre del handlet om elevenes generelle hjelpemiddelbruk i matematikk. Her fikk elevene spørsmål om hvilke hjelpemidler de bruker, hvor ofte de bruker dem, og hva de bruker dem til. De fikk også spørsmål om hvordan deres ferdigheter og forståelse har blitt påvirket av hjelpemiddelbruken.

I et intervju som handler om digitale hjelpemidler er det en viss mulighet for at elevene prøver å gi svar de tror er «riktige», at det de sier stemmer overens med det de tror jeg ønsker å høre. I den forbindelse gjorde jeg to ting for å øke validiteten. For det første presiserte jeg underveis i intervjuene at det ikke finnes noen «riktige svar», og at jeg kun var ute etter deres tanker for hvert spørsmål. For det andre avsluttet jeg intervjuet med en kontrolloppgave; en oppgave fra TIMSS Advanced 2008 som ikke ble med på min test. Elevene fikk se oppgaven og mulighet til å tenke seg litt om, før de skulle forklare hvordan de ville gått fram for å løse den. Hensikten med kontrolloppgaven var å se om det var samsvar mellom det eleven hadde fortalt i intervjuet og valg av løsningsmetode, for om mulig å kunne se om eleven «pyntet på» tankegangen bak oppgaveløsningene på testen. Intervjuene viste at svarene om kontrolloppgaven gled naturlig inn i de respektive elevenes svar i resten av intervjuet, noe som tyder på at opplysningene de har gitt er pålitelige.

Etter intervjuene lyttet jeg til opptakene, og vurderte innholdet i dem. Jeg kom til at det ikke var nødvendig å transkribere intervjuene i sin helhet, siden ikke all informasjon er relevant for min problemstilling. Dette, samt hensynet til tidsplanen, førte til at jeg kun transkriberte deler av intervjuene. Transkripsjonen er skrevet med en blanding av bokmål og dialekt, og det er lagt vekt på å få med elevenes tenkepauser i teksten.

4.3.3 Analyse og skriftlig presentasjon

I analysearbeidet har jeg benyttet meg av resultatene fra TIMSS Advanced 2008, mine intervjuer, samt resultatene fra testen i R2. Jeg har valgt å knytte endel kommentarer til resultatene i denne oppgaven, og neste kapittel har med det fått navnet «Resultater og diskusjon». Det ville vært unaturlig å presentere utdrag fra intervjuene uten å kommentere dem, og denne framstillingen gjør det også lettere å se sammenhenger mellom mine tre kilder til empiri.

Metodetrianguleringen bidrar til å øke reliabiliteten, og i all hovedsak pekte informasjonen fra intervjuene i samme retning som resultatene fra TIMSS Advanced 2008. I neste kapittel presenterer jeg en god del utdrag fra intervjuene, slik at andre får et godt grunnlag for å vurdere mine tolkninger. Alle lydopptak og transkriberinger er tatt vare på, og interesserte kan gjøre sine egne vurderinger av all rådata.

Undersøkelsen TIMMS Advanced 2008 har gått gjennom pilotering og grundig kvalitetskontroll, og er utført av noen av de fremste forskerne på området. Jeg nøyer meg her med å fastslå at dataene hentet derfra holder meget høy kvalitet. For mer om rammeverket til undersøkelsen viser jeg til den norske rapporten «Matematikk i motvind» (Grønmo et al., 2010). Her finner man også interessante resultater og diskusjoner som ikke blir presentert i neste kapittel.

5 Resultater og diskusjon

I dette kapittelet går jeg først igjennom de 10 oppgavene som utgjorde min test. Her viser jeg resultatene fra TIMSS Advanced 2008, fra min testklasse og gjengir sentrale utdrag fra intervjuene. For hver oppgave diskuterer jeg hvordan digitale hjelpemidler har blitt brukt. Siden oppgavenes utforming er sentralt i mine undersøkelser, har jeg valgt å sakse oppgavene nøyaktig slik de sto i testen elevene fikk. Etter denne gjennomgangen presenterer jeg resultater knyttet til elevenes holdninger og ferdigheter i matematikk, for å belyse min underproblemstilling.

5.1 Oppgaver

5.1.1 Oppgave 1

$$\frac{x+1}{x-2} > 1$$

Løs ulikheten ovenfor.

	Test i R2		Norge	Internasjonalt
	m/hjelpemiddel	u/hjelpemiddel		
Riktig svar $x > 2$	6 % (1 elev)	0 % (0 elever)	16 %	45 %
Galt svar	6 % (1 elev)	88 % (15 elever)	64 %	48 %
Ikke svart	0 %		20 %	7 %

I denne oppgaven skulle elevene i TIMSS Advanced 2008 kun skrive inn svaret på ulikheten, og det er derfor vanskelig å si hvordan de har kommet fram til dette svaret. Fra R2-testen ser vi at kun to elever har benyttet hjelpemidler her, selv om alle hadde GeoGebra tilgjengelig. Femten av sytten elever har altså valgt å løse ulikheten ved regning, og samtlige har mislyktes i forsøket. Svaret som går igjen flest ganger er at $x + 1$ alltid vil være større enn $x - 2$, og at ulikheten derfor stemmer for alle x unntatt $x = 2$.

På spørsmål om de vurderte hjelpemidler her, er elevene ganske samstemte:

> *Elev 3: Det ser ut som en sånn typisk regneoppgave*
>
> *Elev 1: Egentlig så ser jeg ikke på det som en funksjon, på en måte. Eller, det er mer en likning. (Eh..) Jeg har aldri brukt likninger i GeoGebra. Vi er vant til å bruke funksjoner i GeoGebra. Så det var enten kalkulator eller papir, og i og med at det er x'er på den, så er det vanskelig å ta den på kalkulatoren, så da..*
>
> *Elev 4: Der tenkte jeg liksom bare med en gang.. regne.*

Det kan virke som oppgavens nakne utforming, en ulikhet med et rasjonalt uttrykk og teksten «løs ulikheten ovenfor», leder elevene til å løse oppgaven ved regning. Dette til tross for at eleven kun skal skrive svaret på ulikheten, og at det ikke står noe om påkrevd framgangsmåte.

Holder vi sitatene over opp mot svarene fra R2-testen og TIMSS Advanced 2008, kan det virke som elevene ikke har tilstrekkelig forståelse for hva en ulikhet er, men heller har prøvd å lære seg algoritmer for å løse forskjellige ulikheter. Trolig er det likevel ikke ulikheten i seg selv som er hovedproblemet i denne oppgaven, snarere kombinasjonen av et rasjonalt uttrykk og en ulikhet. Denne antakelsen underbygges av følgende sitat fra elev 1:

> *Jeg tenkte, jeg tenkte at.. Jeg husket at det var noe når jeg deler og ganger med, når det er sånn større- eller mindretegn i midten, at jeg måtte snu det. (...) Det er lenge siden, det er en stund siden vi holdt på med sånne.*

Ulikheter og rasjonale uttrykk finner vi i læreplanen for både 1T og R1, som er det mest avanserte matematikkurset på henholdsvis første og andre trinn i videregående skole:

R1:

- omforme og forenkle sammensatte rasjonale funksjoner og andre symbolske uttrykk med og uten bruk av digitale hjelpemidler (Utdanningsdirektoratet, 2006a).

1T:

- bruke digitale hjelpemiddel til å drøfte polynomfunksjoner, rasjonale funksjoner, eksponentialfunksjoner og potensfunksjoner.
- løse likninger, ulikheter og likningssystemer av første og andre grad og enkle likninger med eksponential- og logaritmefunksjoner, både med regning og med digitale hjelpemiddel (KD, 2006a).

Det står eksplisitt i kompetansemålene til begge kursene at elevene skal jobbe med digitale hjelpemidler i tilknytning til ulikheter og rasjonale uttrykk. På bakgrunn av dette er det noe merkelig at våre matematikkeksperter i videregående ikke tyr til et hjelpemiddel som kan tegne grafer, når de åpenbart ikke husker hvordan ulikheten kan løses for hånd. Svarene elevene gir i intervjuene underbygger teorien om at ordlyden i oppgaven har noe å si for valg av løsningsmetode, og det ser ut til at Grønmo, Onstad og Pedersen (2010) har et poeng når de påpeker at norske elever har en lang vei å gå når det gjelder kreativ bruk av hjelpemidlene. Som vi skal se i neste oppgave er det likevel ikke helsvart, for når en ulikhet blir satt inn i en praktisk kontekst skårer norske elever langt bedre.

5.1.2 Oppgave 2

Det er foreslått to matematiske modeller for å beregne inntekten y kroner ved salg av x tusen enheter av en vare (hvor $0<x<5$). De to modellene, P og Q, er basert på to ulike markedsføringsmetoder.

modell P: $y=6x-x^2$
modell Q: $y=2x$

For hvilke verdier av x gir modell Q større inntekt enn modell P?

Ⓐ $0<x<4$
Ⓑ $0<x<5$
Ⓒ $3<x<5$
Ⓓ $3<x<4$
Ⓔ $4<x<5$

	Test i R2		Norge	Internasjonalt
	m/hjelpemiddel	u/hjelpemiddel		
Riktig svar E	24 % (4 elever)	29 % (5 elever)	59 %	51 %
Galt svar	6 % (1 elev)	35 % (6 elever)	34 %	38 %
Ikke svart	6 % (1 elev)		7 %	11 %

Dette er en oppgave som kan løses grafisk, eller ved å løse en andregradsulikhet ved regning. Norske elever presterer her bedre enn det internasjonale gjennomsnittet, noe som kan sies å være overraskende med tanke på resultatene fra den forrige oppgaven. I R2-testen var det fire elever som kom fram til riktig svar gjennom en grafisk løsning, mens fem løste den ved regning. Totalt var det fem elever som brukte grafiske hjelpemidler i denne oppgaven, mot to i den forrige. I intervjuene gir flere av elevene uttrykk for at de tenkte på GeoGebra med en gang, siden de matematiske modellene var gitt som funksjoner i oppgaven. Dette stemmer godt overens med antakelsen i rapporten fra TIMSS Advanced 2008 (Grønmo et al., 2010), om at en god del har valgt å løse oppgaven grafisk på kalkulator.

Grunnen til at elevene velger å bruke GeoGebra på oppgave 2 synes å være todelt. Hovedgrunnen er at de får servert to funksjonsuttrykk som står på en form de er vant til, og som kan skrives inn på datamaskinen uten bearbeiding. Som elev 3 sier:

> *Så er det kanskje vane, litt. At det er sånne oppgaver vi ofte har brukt GeoGebra på. (...) Med funksjonsuttrykk og matematiske modeller, hvor det er enkelt å se grafisk.*

Den andre grunnen til at digitale hjelpemidler blir brukt her, er den praktiske formuleringen av oppgaven. Her opplever ikke elevene at de er bundet av en bestemt framgangsmåte, og flere velger følgelig å løse den grafisk.

Selv om vi så hyppigere bruk av hjelpemidler i denne oppgaven, velger fortsatt elleve av sytten elever å løse den ved regning. Ut fra svarene i denne og andre oppgaver er det to grunner til dette. For det første er det fortsatt ikke alle som ser muligheten for å løse problemet grafisk. Elev 1 valgte å prøve seg fram med forskjellige tall i hodet, for å se når modell Q ble større enn modell P. På spørsmål om han noen gang vurderte kalkulator eller GeoGebra svarer han:

> *Nei, det gjør jeg ikke altså.. Hadde jeg hatt, hadde det vært en vanskelig likning ville jeg nok satt inn tallene i kalkulator, men i og med at den var såpass lett den 6x minus x i annen, så hadde jeg bare tatt den i hodet uansett.*

Elev 1 framstår som en faglig sterk elev, fikk 10 av 13 poeng på testen, og løste omtrent halvparten av oppgavene ved hjelp av GeoGebra. Han kom fram til riktig svar på en gjennomtenkt måte, men det er verdt å merke seg at han ikke engang vurderte å tegne grafen til funksjonene med et hjelpemiddel. For de som ikke klarte å løse oppgaven ved regning, er det verre at grafisk løsing ikke ble vurdert. Vi ser av tabellen at kun en av de fem som brukte

GeoGebra svarte feil, mens over halvparten av de som regnet kom fram til galt svar. Ut fra læreplanen er det oppsiktsvekkende at ikke flere elever tenker på å løse ulikheter grafisk, siden dette blir vektlagt på flere årstrinn. Det kan virke som mange elever trenger tydelige hint i oppgaven før de velger å bruke kalkulator eller digitale hjelpemidler. Dette får vi et eksempel på i neste oppgave, gjennom et utdrag fra intervjuet med elev 1.

Den andre grunnen til at flesteparten av elevene velger å løse oppgaven med regning, er trangen til å løse et problem enklest og raskest mulig. I flere av intervjuene sier elevene at de valgte å regne, fordi sidene i ulikheten var såpass enkle at det gikk fortere å regne enn å skrive inn funksjonene i GeoGebra. Dette argumentet går igjen i løsningen av mange oppgaver, både når de benytter hjelpemidler og når de velger det bort. Som vi skal se i den videre gjennomgangen står forklaringen «lettere og raskere» fram som en av de viktigste når elevene velger framgangsmåte. Flere elever gikk seg likevel bort i sin higen etter å løse problemet kjapt og enkelt. Seks elever kom fram til feil svar ved regning, og de fleste av disse løste ulikheten som en likning, hvor de fikk svarene $x = 0$ og $x = 4$. Disse tallene fant de igjen i svaralternativ A, og gikk følgelig for det svaret. Ser vi bak tallene både i Norge og internasjonalt, finner vi at alternativ A er overrepresentert blant feilsvarene, noe som kan tyde på at flere elever begår dette feilgrepet. Om dette skyldes mangelfull forståelse for matematiske ulikheter eller bare er et uttrykk for at oppgaveløsningen har gått vel fort, er vanskelig å si, trolig skyldes det en kombinasjon av begge. I læreplanen i matematikk fellesfag finner vi under grunnleggende ferdigheter at det er et mål å vurdere hvor rimelige svarene er (KD, 2006a). Flere som valgte alternativ A kunne nok kommet på bedre tanker dersom de hadde tatt seg tid til å vurdere svaret opp mot oppgaveteksten.

5.1.3 Oppgave 3

Hvor mange punkter med heltallige koordinater ligger på grafen til funksjonen $y = \frac{12}{x}, x > 0$?

Ⓐ 2

Ⓑ 4

Ⓒ 6

Ⓓ uendelig mange

	Test i R2		Norge	Internasjonalt
	m/hjelpemiddel	u/hjelpemiddel		
Riktig svar C	29 % (5 elever)	35 % (6 elever)	46 %	48 %
Galt svar	18 % (3 elever)	18 % (3 elever)	46 %	45 %
Ikke svart	0 %		8 %	7 %

Denne oppgaven ble valgt til R2-testen fordi den inneholder flere triggerord. «Koordinater» og «grafen til funksjonen» er begge begreper som peker i retning av hjelpemidler som kan tegne grafer. Når grafuttrykket i tillegg er gitt, burde det meste ligge til rette for å finne fram GeoGebra. Aberet her er at dette i første rekke er en oppgave innenfor temaet tallteori, der den enkleste løsningen vil være å sette inn tallene fra 1 til 12 for *x*, og se hvilke *x*-verdier som gir en heltallig *y*-verdi. Grafen av funksjonen vil i seg selv ikke gi et direkte svar, man er avhengig av å telle opp punktene med heltallige koordinater også ved en grafisk løsning.

Som vi ser av tabellen valgte likevel omtrent halvparten av elevene i R2-klassen å tegne grafen i GeoGebra. Dette skyldes ifølge flere elever at det virket som en opplagt løsning, siden oppgaven inneholdt en henvisning til koordinater og et funksjonsuttrykk. Jeg tar med et utdrag fra intervjuet med elev 1 for å illustrere dette. Her har eleven forklart at han tegnet grafen fordi han ikke klarte å forestille seg den i hodet.

> *Intervjuer: Var det noen grunn til at du tenkte GeoGebra på den (oppgave 3), og ikke på de to (oppgave 1 og 2) for eksempel?*
>
> *Elev 1: Eh.. Nei.. Det er vanskelig å si, jeg... (stille) Nei, fordi her hadde det mer med koordinatsystemet å gjøre da, tenkte jeg. Kanskje.. At jeg kanskje skjønte med en gang at den her kan jeg skrive den inn i GeoGebra, men at jeg kanskje ikke så det på de to, fordi.. Ja, jeg vet ikke jeg, her er det en del av oppgaven å bruke koordinatsystemet, men det var det ikke i de to. På en måte...*
>
> *Intervjuer: Ja, okei. Skjønner.*
>
> *Elev 1: Ja, for man kunne jo sikkert satt inn disse her også i GeoGebra (peker på de to funksjonene i oppgave 2), også sett når den ene går over den andre og sånn.*
>
> *Intervjuer: Ja, det er en mulighet.*
>
> *Elev 1: Ja, det tenkte jo ikke jeg på.*

Utdraget viser at selv faglig sterke elever kan trenge nokså tydelige hint i oppgaveteksten før de tyr til kalkulator eller GeoGebra, dersom de ikke kjenner en bestemt framgangsmåte for bruk av hjelpemidler. Elevene skal, ifølge læreplanen, kjenne metoder for kalkulatorbruk også på oppgave 1 og 2, men det er åpenbart at disse ikke er like godt innarbeidet som enkelte framgangsmåter vi skal se på senere. I denne oppgaven er triggerordene tydelige, og flere velger å tegne grafen for å se den bedre for seg. Dette stemmer overens med teorien flere forskere har brukt til støtte for digitale hjelpemidler, teorien om at visualisering bidrar til bedre forståelse i matematikk (Geiger, Faragher, Goos, 2010) (Persson, 2009).

5.1.4 Oppgave 4

Hvor mange løsninger har likningen $\sin x + \cos x = 2$ i intervallet fra 0 til 8π?

Ⓐ 0
Ⓑ 2
Ⓒ 4
Ⓓ 8

	Test i R2		Norge	Internasjonalt
	m/hjelpemiddel	u/hjelpemiddel		
Riktig svar A	24 % (4 elever)	29 % (5 elever)	33 %	46 %
Galt svar	0 % (0 elever)	47 % (8 elever)	63 %	46 %
Ikke svart	0 %		4 %	8 %

Denne oppgaven ble inkludert i prøven fordi den gir elevene muligheten til å løse en trigonometrisk likning ved å bruke grafiske metoder i GeoGebra. Denne muligheten er likevel ikke opplagt, siden oppgaven ikke inneholder triggerord eller er utformet på en måte som innbyr til å bruke hjelpemidler. Oppgaven kan likevel løses uten hjelpemidler, på to forskjellige måter. En mulighet, som de fleste elever nok vil oppleve som krevende, er å skrive om venstresiden til et uttrykk der sinus er eneste trigonometriske funksjon. Det gir en likning elevene kjenner igjen, og ved til slutt å bruke kalkulatoren til å finne den inverse til sinus, vil nok mange konkludere med at likningen ikke har noen løsninger. I kompetansemålene for R2 står det at elevene skal kunne «omforme trigonometriske uttrykk av typen a sin kx + b cos kx, og bruke dem til å modellere periodiske fenomener» (Utdanningsdirektoratet, 2006b), så elevene burde være kjent med denne løsningsformen. En annen mulighet er å tenke på de grunnleggende egenskapene til funksjonene sinus og cosinus, og resonnere ut fra kunnskapen man har om disse. Sinus og cosinus har begge maksimalverdi lik 1. Siden funksjonene ikke antar sin maksimalverdi samtidig (for samme x-verdi), vil summen sin x + cos x aldri kunne bli to, og likningen har følgelig ingen løsning. Som vi ser har fem elever løst oppgaven på denne måten, og kommet fram til riktig svar uten hjelpemidler.

Dersom man tegner grafen i GeoGebra er det også flere muligheter å velge i. Man kan tegne grafen til sin x og cos x hver for seg, og se at de ikke er 1 samtidig. Et enkelt resonnement som over, gir da at likningen ikke har noen løsninger. En annen mulighet, som ble benyttet av de fire elevene som klarte oppgaven med hjelpemidler, er å tegne en graf for sin x + cos x og en graf der y-verdien er to, for så å se hvor mange ganger grafene krysser. Elev 2, som valgte denne løsningsmetoden, gjorde ellers de fleste oppgavene uten hjelpemidler, og ga følgende forklaring på hjelpemiddelbruken i dette tilfellet:

> *Ja, fordi jeg visste liksom ikke hvordan jeg skulle løse sin x pluss cos x er lik to, fordi at, det på en måte, både var sin x og cos x i samme likningen. Så da visste jeg ikke helt hva jeg skulle gjøre, så da, gikk jeg til PC'n da, og tenkte at det, den kunne løse det, på en måte. Ja..*

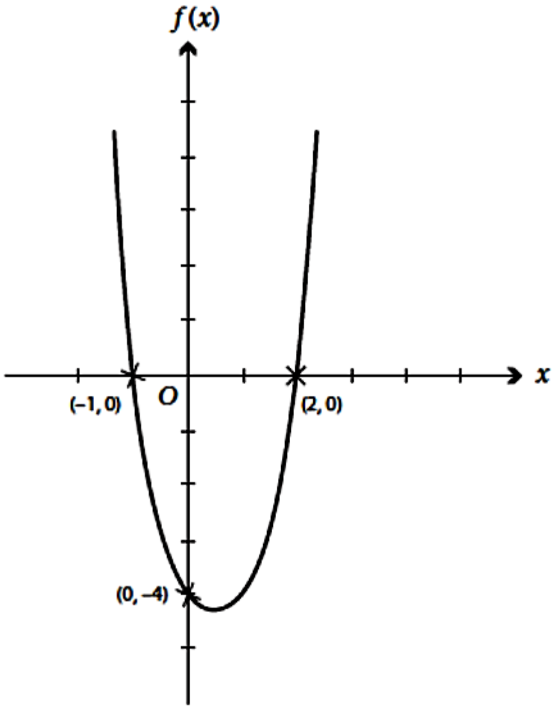
Dette er et godt eksempel på kreativ hjelpemiddelbruk. Eleven er usikker på hvordan oppgaven kan løses for hånd, og bruker mulighetene GeoGebra gir, uten at oppgaveteksten har ledet til det. Kombinert med et lite resonnement gir det riktig svar. For å løse likningen på denne måten må eleven ha forståelse for at høyre og venstre side i likningen kan sees på som to separate funksjoner, og kjenne til hvordan man kan skrive disse inn i GeoGebra. Så og si alle klarer det siste, så problemet ligger i likningsforståelsen. Elev 4 sier i intervjuet at:

> *Jeg er ikke så vant til å bruke sånn GeoGebra og sånn når det kommer sånn sinus og sånn.*

Ser vi sitatet i lys av Lithners (2003) teorier om oppgaveløsing, tyder mye på at elevens resonnement her kan kategoriseres som identification of similarities. Eleven fokuserer på oppgavens ytre trekk, som sinus og cosinus, og mister likningsaspektet litt av syne. Dette, i tillegg til andre sitater vi skal se på, tyder på at vane er et sentralt begrep når vi skal prøve å forstå elevers omgang med digitale hjelpemidler i matematikk. De bruker kalkulator eller GeoGebra først og fremst i møte med oppgavetyper der de tidligere har brukt digitale verktøy, og kjenner en framgangsmåte med det aktuelle hjelpemiddelet. Evnen til å bruke hjelpemidler som en del av løsningen, slik at man lettere ser en vei som kan føre fram til et svar, synes ikke å være spesielt godt utviklet. Dette er i tråd med Grønmo, Onstad og Pedersen (2010) sin gjennomgang av TIMSS Advanced 2008, hvor de stiller spørsmål ved norske elevers hjelpemiddelkompetanse. Med hjelpemiddelkompetanse mener vi ikke bare å beherske bruken av hjelpemidlene; like viktig er det å vurdere når det er hensiktsmessig å bruke dem, og å kunne resonnere videre ut fra informasjonen man får gjennom dem.

Noe av det viktigste i matematikkundervisningen er å utvikle elevene til å bli gode problemløsere. Svarene på denne oppgaven kan tyde på at norske elever mangler kunnskap om hvordan man forholder seg til en oppgave der man ikke kjenner en løsningsalgoritme. Så mange som åtte elever i testklassen mislyktes i sitt forsøk på å løse likningen for hånd. Mange av disse forsøkte å dele hele likningen på cos x, i håp om å kvitte seg med både sinus- og cosinusleddet. Dette er en framgangsmåte de har lært, som går igjen i oppgaver i R2, og det er derfor ikke unaturlig at mange følger denne første innskytelsen. Når de så opplever at forsøket ikke fører fram, men heller gjør likningen «styggere», virker det som de fleste mer eller mindre gir opp, og gjetter et alternativ. Her skulle jeg gjerne sett at flere ser etter en ny innfallsvinkel til problemet, ettersom den første ikke ga noen løsning. Både i Norge og internasjonalt er svaralternativ C det mest populære feilsvaret. Vi er ute etter antall løsninger mellom 0 og 8π, altså over fire omløp. Det at mange svarer fire løsninger, tyder på at de vet at sinus og cosinus oppnår maksimalverdien 1 en gang i hvert omløp. De overser da det viktige poenget at funksjonene ikke oppnår denne verdien samtidig. I Norge ser vi at alternativ D (8 løsninger) også er et populært feilsvar, spesielt når vi sammenligner med andelen i andre land som har valgt dette alternativet. Dette kan skyldes at norske elever er vant til å jobbe med symmetrier på enhetssirkelen, der de har erfart at oppgavene ofte har to løsninger i første omløp (Grønmo et al., 2010). Igjen ser vi at vane preger elevene, både når det gjelder valg av løsningsmetode og hva de godtar som rimelige svar.

5.1.5 Oppgave 5



Grafen til funksjonen *f* er vist ovenfor. Funksjonsuttrykket til *f* er gitt ved $f(x) = ax^2 + bx + c$. Finn verdiene til *a*, *b* og *c*.

Vis framgangsmåten.

	Test i R2		Norge	Internasjonalt
	m/hjelpemiddel	u/hjelpemiddel		
Riktig svar	24 % (4 elever)	35 % (6 elever)	10 %	24 %
Galt svar	0 % (0 elever)	35 % (6 elever)	27 %	36 %
Ikke svart	6 % (1 elev)		63 %	40 %

Denne oppgaven ble brukt i den internasjonale rapporten fra TIMSS Advanced 2008, som et eksempel på hva en elev på avansert nivå kan. Vi ser at dette falt ut som en vanskelig oppgave, med et internasjonalt gjennomsnitt på bare 24 %. Norske elever hadde enda større problemer, kun en av ti klarte denne oppgaven i 2008. Testklassen skiller seg klart fra disse resultatene, i og med at nesten 60 % klarte oppgaven. Det kan virke som klassen har hatt større fokus på andregradsfunksjoner enn det som er vanlig i norsk skole, i intervjuene ga elevene inntrykk av å ha svært god forståelse for emnet. Denne forskjellen mellom testelevene og elevene fra prøven i 2008 kan være verdt å ha i bakhodet, da sistnevnte gruppe nok har feiloppfatninger og problemer som ikke kommer fram under intervjuene, siden alle intervjuobjektene klarte denne oppgaven. Med fokus på bruk av hjelpemidler er svarene likefullt interessante, all den tid min studie ikke har noe mål om å generalisere.

Oppgaven kan løses både med og uten hjelpemidler. Den mest brukte metoden internasjonalt var å sette de tre punktene inn i funksjonsuttrykket, og med det få tre likninger med tre ukjente, a, b og c. Denne metoden ble også brukt av elever i testklassen, deriblant av elev 2. En annen metode flere elever i testklassen brukte, var å se på nullpunktene og bruke disse til å definere en funksjon $g(x) = (x + 1)\,(x - 2)$. For å få denne andregradsfunksjonen til å gå gjennom punktet (0,-4) multipliserte de $g(x)$ med 2, og kom fram til at $a = 2$, $b = -2$ og $c = -4$, som er riktig svar.

Oppgaven inneholder ordene «grafen til funksjonen», ord vi har sett leder elevene i retning datamaskinen. Denne oppgaven kan løses med regresjon på en grafisk kalkulator eller i GeoGebra. Ved å plotte de tre punktene og velge andregradsfunksjon får man funksjonsuttrykket direkte, og kan lese av verdiene til a, b og c. Regresjon er en kjent metode for elever i R2, og denne oppgaven kan raskt gjenkjennes som velegnet for en slik metode. To av elevene som valgte å løse oppgaven på denne måten forteller at hovedgrunnen for valget var at regresjon er raskt og enkelt.

> *Elev 1: Nei, det er vel fordi det har med en graf og et koordinatsystem å gjøre, tenker jeg. Da tenker jeg at, da ser jeg på det som en løsning med en gang. En lett løsning.*

> *Elev 3: Også, eh, så jeg at det var markert tre punkter, altså, som var helt presise, og da visste jeg at jeg kunne bruke den listefunksjonen i GeoGebra, og legge det inn og prøve meg fram, om det var, eh. Regpoly eller en av de andre. Og da tenkte jeg at det var kjekt, rett og slett.*
>
> *Intervjuer: Ja. Kjekt, som i..?*
>
> *Elev 3: Enkelt.*

Vi ser nok en gang at elementer som graf og koordinatsystem i en oppgave er avgjørende for at elever skal tenke på å bruke digitale hjelpemidler. En setning i oppgaven som kan ha ført til at enkelte elever likevel velger å løse den ved regning, er den siste setningen «Vis framgangsmåten». Jeg går ut fra at ordet framgangsmåten er valgt med omhu, slik at oppgaven muliggjør bruk av hjelpemidler, noe formuleringer som «vis ved regning» eller «vis utregningen» ikke ville gjort. Endel elever vil likevel oppfatte denne setningen som en oppfordring til å regne ut svaret, fordi de er usikre på hva som forventes i et skriftlig svar når de ha brukt GeoGebra til å finne løsningen. Dette forteller Elev 2 når hun forklarer sin løsning:

> *Jeg er kanskje litt usikker på hva jeg må gjøre når jeg, hvis jeg velger å løse oppgavene med GeoGebra, og da tenker jeg at da er det bare mye greiere å løse for hånd. Fordi da vet jeg hvordan jeg skal gjøre det, på en måte, og hvordan jeg skal føre ting.*

For å gi elevene full frihet til å velge framgangsmåte er det derfor viktig at læreren er tydelig på hva som bør inngå i en besvarelse der digitale hjelpemidler er benyttet. I tillegg til denne grunnen er det en annen forklaring som peker seg ut blant elever som har valgt å løse oppgaven ved regning. Alle elevene som ble intervjuet fortalte på et eller annet tidspunkt at de liker å bruke GeoGebra for å få et bilde av funksjoner, og at det gjør det lettere både å forstå og å kunne gjøre beregninger med funksjonene. I denne oppgaven er grafen tegnet på forhånd, og flere sier da at det ikke vil være noe poeng i å tegne den på nytt med digitalt verktøy. Både elev 2 og elev 4 gir uttrykk for dette, og spesielt dette sitatet fra elev 2 vil nok klinge godt i mange lærerører:

> *Nei, jeg tenkte liksom at jeg hadde jo grafen der, så da måtte jeg jo bare.. Ja, se på grafen, bruke grafen og det jeg kunne om grafer.*

På denne oppgaven framkommer det interessant informasjon hvis man ser bak resultatene, og tar hensyn til hvordan elever som har fått riktig svar har løst oppgaven. Vi ser av tabellen over at kun ti prosent av norske elever fikk full uttelling på denne, en andel som er lavere enn de fleste land det er naturlig å sammenlikne seg med. Over halvparten av elevene i Norge som klarte oppgaven brukte regresjon på kalkulatoren, en metode som nesten ikke er representert internasjonalt. Faktisk hadde så få som én prosent av alle elever kommet fram til riktig svar ved hjelp av regresjon. I et land som Nederland, som utpeker seg med flittig bruk av kalkulator i undervisningen, hadde også bare en prosent løst oppgaven med regresjon. Andre land som blir trukket fram i «Matematikk i motvind» er Italia og Slovenia, der henholdsvis 22 og 33 prosent klarte oppgaven (Grønmo et al., 2010), og så godt som samtlige hadde løst oppgaven ved regning. Disse landene brukte kalkulatoren i langt mindre grad enn både Norge og Nederland, og uten at vi skal gå nærmere inn på undervisningstradisjonene i de aktuelle landene, er det grunn til å stille spørsmål ved om et overdrevent fokus på regresjon som metode undergraver forståelsen for sammenhengen mellom funksjonsuttrykk og grafer. Regresjon på kalkulatoren er et eksempel på en framgangsmåte som kan læres inn og brukes uten krav om resonnement eller refleksjon, og som så godt som alltid vil gi deg fasitsvaret. Instrumentell bruk av hjelpemidlene kommer jeg tilbake til i kapittel 6, men kan allerede her antyde at denne formen for kalkulatorbruk nok ikke fremmer elevers evne til problemløsning. Den neste oppgaven vi skal se på underbygger denne påstanden.

5.1.6 Oppgave 6

$$f(x) = x^4 - 2x^2$$

A. Hva er verdiene av x i skjæringspunktene mellom grafen til f og x-aksen?

x = ________________

B. Bestem maksimal- og minimalpunktene til grafen til f.

Maksimalpunkt(ene): ________________

Minimalpunkt(ene): ________________

Del A	Test i R2		Norge	Internasjonalt
	m/hjelpemiddel	u/hjelpemiddel		
Riktig svar	59 % (10 elever)	29 % (5 elever)	34 %	36 %
Galt svar	6 % (1 elev)	6 % (1 elev)	37 %	33 %
Ikke svart	0 %		29 %	31 %

Del B	Test i R2		Norge	Internasjonalt
	m/hjelpemiddel	u/hjelpemiddel		
Riktig svar	53 % (9 elever)	29 % (5 elever)	26 %	19 %
Galt svar	12 % (2 elev)	6 % (1 elev)	41 %	43 %
Ikke svart	0 %		33 %	38 %

Denne oppgaven ble valgt fordi den kan løses med en fastlagt algoritme, enten ved tradisjonell regning for hånd eller med spesielle kommandoer i GeoGebra eller på en grafisk kalkulator. Begge metodene skal være kjent for norske elever i R2, og den gangs 3MX. I oppgave A skal elevene finne verdien til x i skjæringspunktene mellom grafen til f og x-aksen. Dette kan enkelt løses grafisk, ved å tegne grafen og se hvor skjæringspunktene ligger. De fleste graftegnere har også en kommando som gir deg koordinatene til skjæringspunktene direkte. Dersom man velger å løse oppgaven uten digitale hjelpemidler, må man selv innse at funksjonsverdien i skjæringspunktene er 0, og løse likningen $x^4 - 2x^2 = 0$. Begge deler burde være overkommelig for matematikkekspertene i videregående skole.

Til tross for så vidt enkle løsningsalgoritmer skårer norske elever forholdsvis lavt på del A, igjen svakere enn det internasjonale gjennomsnittet. I testgruppa klarte derimot 15 av 17 elever oppgaven, et resultat som er markant bedre enn alle land som deltok i undersøkelsen i 2008. Vi kan ikke lese noe om valg av løsningsmetode ut fra statistikken som er tilgjengelig etter TIMSS Advanced, men i testgruppa benyttet 11 av elevene GeoGebra på del A. Når det gjelder tegning av og arbeid med grafer, er forskjellene mellom en grafisk kalkulator som elevene benyttet i 2008 og GeoGebra betydelige. Som hjelpemiddel i akkurat denne oppgaven er mulighetene likevel forholdsvis like, all den tid begge gir deg muligheten til å skrive inn et funksjonsuttrykk og bruke en kommando for å finne skjæringspunktene. Det er grunn til å tro at GeoGebra kunne hjulpet noen av elevene som ikke fikk til oppgaven i 2008, men langt fra mange nok til at det kan være med å forklare forskjellen i skår. Hovedårsaken til de gode resultatene i testgruppa er mest sannsynlig at klassen har jobbet mer med grafer enn det som er vanlig, og dermed gjenkjenner oppgaver der man har algoritmer for å finne nullpunkter og ekstremalpunkter. En annen mulig årsak er at læreren i klassen har brukt GeoGebra aktivt i undervisningen av emnet, en mulighet som ikke var til stede på samme måte da man brukte grafisk kalkulator. Ved å få grafer på prosjektor har læreren bedre forutsetninger for å diskutere grafer og deres ekstremalpunkter med klassen, og med det korrigere de misforståelser og feiloppfatninger som finnes. Denne muligheten hadde man kanskje ikke i like stor grad tidligere, da grafiske kalkulatorer først og fremst ble brukt av elevene hver for seg.

Alle de fire elevene jeg intervjuet trakk fram det å få et visuelt bilde av grafen til en funksjon som en av de største fordelene med digitale hjelpemidler. Dette harmonerer med det Solvang (1992) hevder, og som vi har sett på i teoridelen, å beherske flere representasjonsformer bidrar til økt forståelse av et emne. Det kan også sees i forbindelse med Sfards (1991) teorier om matematisk forståelse, med tanke på at visualisering ved hjelp av digitale hjelpemidler kan gjøre det lettere å nå fasen hun kaller reifikasjon. Elevene gir uttrykk for at det hjelper på forståelsen å kunne tegne grafen til en gitt funksjon i GeoGebra, men legger heller ikke skjul på at det også er mer behagelig enn å gjøre utregninger for hånd.

> *Intervjuer: Hvorfor GeoGebra på den?*
>
> *Elev 1: Fordi, eh.. Fordi vi fikk lov og fordi det er mye kjappere egentlig. Jeg kunne sikkert satt den er lik null og funnet noen svar der og sånn, men. Det er.. Hvis skjæringspunktene, ja nettopp.. Ja, jeg kunne vel satt er lik null også funnet masse.. tull ut av det. Men da måtte jeg ta, ja.. Nei, det var mye lettere med GeoGebra, rett og slett.*
>
> *Intervjuer: Ja, du tar GeoGebra fordi det tar kortere tid, rett og slett?*
>
> *Elev 1: Ja, kortere tid ja. Også så jeg at det var en graf, så da.. Hadde det stått én der i stedet (etter funksjonsuttrykket), så ville jeg nok ikke skjønt hva jeg skulle gjøre, på en måte. Da ville jeg nok prøvd å løse det for hånd.*
>
> *(...)*
>
> *Elev 1: På den ene siden så syns jeg GeoGebra bidrar veldig til å forstå ting.*
>
> *Intervjuer: Ja.*
>
> *Elev 1: Altså, jeg syns den gir meg et bilde i stedet for at jeg bare sitter her og løser masse tall som jeg egentlig ikke skjønner hvordan ser ut. Så gir den meg liksom.. Ser jeg hvordan.. For eksempel når man skriver inn sin x inn i GeoGebra da, så er det veldig morsomt å se hvordan den beveger seg med tiden.*

Det er hovedsakelig to grunner til at eleven velger å løse oppgaven i GeoGebra. Den første og viktigste er at det er gitt et eksplisitt funksjonsuttrykk, som får eleven til å tenke på GeoGebra som en mulighet. Dersom oppgaven hadde vært formulert på en annen måte, eleven nevner likning som eksempel, ville han ikke vurdert hjelpemiddelet som alternativ. Dette er interessant, siden det i praksis er likningen $x^4 - 2x^2 = 0$ man løser for å finne skjæringspunktene. Vi kan altså si at oppgaven grovt sett inneholder to trinn, det første er å innse at man finner skjæringspunktene ved å løse likningen over, mens det andre er å løse den, enten grafisk eller ved regning. En oppgave som sier «Løs likningen $x^4 - 2x^2 = 0$» vil da i teorien være enklere enn den gitte oppgaven, siden den bare inneholder det siste trinnet. For enkelte elever vil den likevel oppleves som vanskeligere, fordi den ikke inneholder ord eller formuleringer som får dem til å vurdere GeoGebra som et aktuelt hjelpemiddel. Det skal sies at mange elever ville klart å løse en slik likning ved regning, men igjen ser vi hvordan deres bruk av hjelpemidler påvirkes av oppgavens utforming.

Idet eleven gjenkjenner en oppgave som en der han kan bruke digitale hjelpemidler, kommer den andre grunnen til å velge GeoGebra inn i bildet. Vi ser av tekstutdraget at han også vet hvordan han kan løse den ved regning, og valget står da mellom to metoder som begge vil kunne føre fram til riktig svar. På spørsmål om hvorfor han valgte GeoGebra oppgir han to årsaker, at de fikk lov og at det er kjappere. Den første forklaringen er åpenbar, for å velge digitale hjelpemidler er det en forutsetning at det er tillatt på oppgaven. Den andre er mer interessant, nemlig den at det er kjappere. En dreven matematiker vil kanskje hevde at dette er en sannhet med modifikasjoner, men det er likefullt elevens hovedgrunn til å velge inntasting i GeoGebra foran regning. I oppgaver der elevene velger å bruke digitale hjelpemidler oppgir de svært ofte «at det er kjapt og enkelt» som en viktig årsak. Elev 3 var i omtrent samme situasjon som elev 1 på denne oppgaven, og svarer følgende på spørsmål om hvorfor han da valgte GeoGebra:

> *Det var rett og slett at det var enkelt. Fordi at, denne visste jeg jo sånn noenlunde, eller jeg husket sånn noenlunde, trodde jeg da i hvert fall, hvordan jeg skulle løst det uten GeoGebra.*

I kontrast til elev 1 og 3 finner vi elev 2, som valgte å løse oppgaven ved regning. Også denne eleven så raskt at GeoGebra kunne være til hjelp, men valgte altså en annen utgang enn de to andre:

> *Ja, da satte jeg egentlig bare det er lik null. Der kunne man jo også skrevet inn i GeoGebra, men så tenker jeg jo bare, det er jo mye lettere å bare løse, eller jeg tenker også at jeg må jo vise hvordan jeg regner ut, også bare, da må jeg jo regne ut. Hvis*

jeg liksom skal løse i GeoGebra, så må jeg jo skrive masse hvordan jeg gjorde det i GeoGebra og sånn, og da tenker jeg at det er mye lettere å bare, eh, gjøre det på papiret. Ja..

Argumentet «raskere og lettere» blir altså brukt begge veier, og står tydelig fram som viktig når elevene bestemmer seg for framgangsmåte.

En annen grunn til å velge digitale hjelpemidler, og som kan leses mellom linjene i intervjuutdragene fra elev 1 og 3, synes å være at elever da føler seg tryggere på at løsningen blir riktig. De kjenner en fast framgangsmåte for bestemte oppgaver i GeoGebra, mens de gjerne er mer usikre på om de husker algoritmen for hånd. Dette kommer enda tydeligere fram gjennom et utdrag fra intervjuet med elev 4.

Intervjuer: Hvorfor bruker du GeoGebra på den?

Elev 4: Jo, for det er sånn jeg har brukt ganske mye før. At jeg liksom har, akkurat på det da.. På den typen oppgaver, med skjæringspunkt og.. Det er jeg vant til. Og hvis du.. ja, mellom grafen til f og x-aksen. Ja, da faller det veldig naturlig for meg å bruke GeoGebra. Det er på en måte, det har vi gjort.. Mye.

Intervjuer: Ja. Ja, har dere blitt opplært i timene og, på.. I GeoGebra?

Elev 4: Ja, vi har brukt GeoGebra på slike oppgaver da.

Intervjuer: Mhm, skjønner. Hvis du skulle løst den uten hjelpemiddel da? Hadde du visst hvordan du skulle startet da?

Elev 4: (mumler) Skjæringspunktet mellom grafen til f og x-aksen. Jo, jeg.. Eh.. Jeg kunne jo.. Eh.. Det er jo sånn, sette.. I x-aksen så er det jo, da er verdien null. Eh.. Nei, det blir feil. (Ler) Jeg var helt.. Eh.. Jeg kunne jo satt. Jo fordi null er lik x i fjerde minus to x i annen, at det kunne jeg regnet ut. Men da ville jeg jo fått.. Ja.. Nei, jeg vet.. Det er sånne oppgaver, jeg bare, pleier jeg alltid å bruke GeoGebra. (ler)

Vane blir igjen trukket fram som en forklaring blant elever, de løser vanligvis denne typen oppgaver ved hjelp av dataprogrammer. Vi ser at elev 4, i likhet med elev 1, har en vag fornemmelse av hvordan oppgaven kan løses for hånd. Han vil sette funksjonen lik 0, men er veldig usikker og viser til at slike oppgaver alltid løses i GeoGebra. Her må det tillegges at intervjusituasjonen nok bidrar til ekstra usikkerhet hos elevene, det er vanskelig å resonnere hvis man føler en form for tidspress. Det at mange elever så og si aldri regner på denne typen oppgaver er likevel et problem, og fører til en usikkerhet som kommer tydelig fram både i intervjuene og i andelen elever med riktig svar i TIMSS Advanced 2008. Denne usikkerheten, kombinert med at digitale hjelpemidler gir svar raskt og enkelt, framstår som sentrale grunner til at elever velger GeoGebra på oppgaver der de kjenner flere løsningsmetoder. En mulig konsekvens er at enkelte elever ikke utvikler en dypere forståelse for emnet, i dette tilfellet funksjonsdrøfting, siden de opplever at de mestrer oppgavene de får i undervisningen ved hjelp av GeoGebra. For læreren kan det bli en utfordring å få elevene til å søke en bredere forståelse, når de allerede klarer å løse de oppgavene de støter på. Ulike konsekvenser av elevenes bruk av digitale hjelpemidler blir ytterligere drøftet i kapittel 6.

På del B er både det norske og det internasjonale gjennomsnittet lavere, men her utpeker norske elever seg positivt sammenliknet med referanselandene. Kun Nederland presterer bedre enn Norge, på det som må anses som en vanskelig oppgave, tatt i betraktning at under tjue prosent klarte oppgaven internasjonalt. Oppgaven er med på testen fordi den, som del A, kan løses med en forholdsvis fast framgangsmåte, enten ved regning eller grafisk. Mens del A kunne løses omtrent like raskt med de to metodevalgene, krever denne delen flere steg dersom man løser den ved regning. Først må funksjonsuttrykket deriveres, før man kan løse en likning der den deriverte settes lik 0. Til sist må man tegne fortegnsskjema, for så å avgjøre hvilke punkter som er topp- og bunnpunkter. Dette er metoder elevene i R2 skal være kjent med, i læreplanen for R1 heter det blant annet at «mål for opplæringen er at eleven skal kunne bruke førstederiverte og andrederiverte til å drøfte forløpet til funksjoner og tolke de deriverte i modeller av praktiske situasjoner» (Utdanningsdirektoratet, 2006a). Framgangsmåten for løsning av oppgaven med digitale hjelpemidler tilsvarer metoden fra del A, med unntak av at man må bruke en kommando som gir ekstremalpunktene til funksjonen. Også denne løsningsformen bør være kjent for elevene, læreplanen i R1 sier også at «eleven skal kunne tegne grafer til funksjoner med og uten digitale hjelpemidler, og tolke grunnleggende egenskaper til en funksjon ved hjelp av grafen» (Utdanningsdirektoratet, 2006a).

Med mantraet om «raskt og enkelt» fra forrige oppgave i mente, er det naturlig å tro at minst like mange elever benyttet GeoGebra på denne delen som i del A. Heller ikke her får vi informasjon om framgangsmåter gjennom statistikken fra TIMSS Advanced 2008. I testklassen ser vi at de samme elleve som brukte GeoGebra på del A, gjør det også på det B. Ti av disse klarte del A, mens 9 fikk riktig svar på del B. Det at elever velger å løse del B ved hjelp av graftegning på PC når de allerede har løst del A på den måten, kan knapt sies å være overraskende. Det er mer tenkelig at elever som har løst del A for hånd, velger å bruke GeoGebra på del B, siden del B krever flere regneoperasjoner enn del A. Dette skjer heller ikke, i klassen var det seks elever som løste begge deloppgaver for hånd, hvorav fem klarte begge. Her ligger nok endel av grunnen til at ikke flere valgte å bruke hjelpemidler på del B, når man husker hvordan man finner svaret for hånd, gir flere av elevene uttrykk for at de foretrekker å vise utregningen i besvarelsen. Blant disse elevene finner vi elev 2, som i del A forklarte at hun valgte dette fordi det er enklere enn å forklare framgangsmåten hun ville brukt i GeoGebra. Eleven forteller videre at det hender at hun bruker hjelpemidler for å tegne grafen etter at hun har løst oppgaven, for å dobbeltsjekke svarene.

> *Elev 2: Ja, der deriverte jeg. Og jeg tenker liksom sånn, jeg tror kanskje, der tegnet jeg inn grafen i GeoGebra, for å på en måte dobbeltsjekke svarene mine. Det er noen ganger jeg gjør det på prøver og sånn også, så, sånn som den funksjonen var jo veldig lett å derivere, og da også veldig lett å finne, eh, nullpunkter og sånn. Eller, toppunkter og sånn. Så da bare, ja.. Liksom. Regnet jeg ut. Jeg vet ikke..*
>
> *Intervjuer: Men du sa at du sjekket med GeoGebra. Gjør du ofte det?*
>
> *Elev 2: Eh, ja, når det er sånne vanskelige, sånn som vi pleier å få litt vanskeligere funksjoner og sånn, på matteprøver, og da liksom, tegner jeg inn grafen, og ser liksom, ja den stiger der og synker der, finner sånn cirka topp- og bunnpunkter og sånn. Eh, for å på en måte, eh, dobbeltsjekke svarene jeg får da. Også, da vet jeg at hvis jeg får et svar som er feil, så.. Ser jeg etter hva jeg, på en måte, hva jeg har gjort feil, på prøven, sånn at det blir liksom, fasit. Ja..*

Det er grunn til å tro at dette er et forholdsvis vanlig bruksområde for GeoGebra, som en metode for å kvalitetssikre svarene man har kommet fram til ved regning. Fra en matematikklærers synspunkt er dette en fin måte å bruke hjelpemiddelet på, siden den tydeliggjør sammenhengen mellom det regnetekniske og det visuelle, og dermed bygger bro mellom ulike representasjonsformer for kunnskap. På en annen side kan man si at en slik bruksmåte frigjør eleven fra å reflektere og vurdere egne svar, en evne man ønsker å bygge opp, og som også står nevnt eksplisitt i læreplanen. Flere av elevene som ble intervjuet nevnte dette på spørsmål om det finnes noen negative sider ved å bruke hjelpemidler. Elev 3 pekte på at man blir dårligere til å forestille seg blant annet grafers utseende gjennom dette sitatet:

> *Også, blir man kanskje dårligere i det å se for seg ting, for at hvis du gjør noe for hånd, så ser du kanskje utviklingen underveis, også ser du at du begynner å nærme deg det. Eh, mens når du bruker en PC eller en kalkulator, så trykker du inn det du skulle ha svaret på, også er svaret der med en gang. Så det er kanskje litt ulempe.*

Elev 1 bemerker også problemet med at hjelpemidlene lett kan ta over for egen refleksjon:

Og ja, og en annen ting, negativ med GeoGebra er det.. At med en gang jeg ser en graf, så skriver jeg den inn i GeoGebra, jeg gidder ikke tenke. Du.. Du tenker mindre på matte'n egentlig.

Vi ser at elevene er bevisste på ulempene ved utstrakt bruk av hjelpemidler, men besvarelsene til de aktuelle elevene tyder på at dette ikke påvirker arbeidsmåtene deres nevneverdig. Begge bruker GeoGebra så snart de får muligheten, og elev 3 utpekte seg spesielt med både hyppig og god bruk av hjelpemiddelet, kun oppgave 1 ble forsøkt løst for hånd. For matematikklærere som ønsker å begrense bruken av hjelpemidler i sine klasser blir denne observasjonen spesielt viktig. Mye tyder på at bevisstgjøring rundt negative sider ved kalkulator og GeoGebra ikke er nok, siden trangen til å løse problemer raskt og enkelt ofte overvinner ulempene elevene kjenner ved ulike løsningsmetoder. Dette blir kommentert nærmere i kapittel 6, hvor vi tar for oss funnene i undersøkelsen mer tematisk.

5.1.7 Oppgave 7

Oppgave 7 er en av oppgavene som ikke har blitt frigitt av TIMSS. Oppgaven er en flervalgsoppgave med fire alternativer, hvor man får oppgitt et funksjonsuttrykk der to av tallene mangler. Man får vite to punkter grafen til funksjonen går gjennom, og oppgaven er å finne verdien til tallene som mangler. Den ble valgt ut til testen fordi den inneholder triggerordet «grafen», i tillegg til at den har et funksjonsuttrykk skrevet eksplisitt, samt to punkter oppgitt på formen (tall, tall). Dette er elementer i oppgaveteksten som leder elevene i retning digitale hjelpemidler, men fraværet av to tall i funksjonsuttrykket gjør at regresjon i GeoGebra ikke kan brukes like enkelt som i oppgave 5.

	Test i R2		Norge	Internasjonalt
	m/hjelpemiddel	u/hjelpemiddel		
Riktig svar	35 % (6 elever)	35 % (6 elever)	27 %	47 %
Galt svar	12 % (2 elever)	12 % (2 elever)	56 %	43 %
Ikke svart	6 % (1 elev)		17 %	10 %

Oppgaven kan løses ved å bruke funksjonsuttrykket og de oppgitte punktene til å lage to likninger, for så å finne de to ukjente verdiene. En annen mulighet, siden oppgaven har svaralternativer, er å prøve og feile ved å sette inn alternativene i funksjonsuttrykket, for så å se om funksjonen kan passe med de to punktene, enten grafisk eller ved regning. Fra tabellen over ser vi at norske elever lå godt under det internasjonale gjennomsnittet på denne oppgaven, noe som kan skyldes at de ikke kjente en bestemt algoritme for å løse oppgaven ved hjelp av kalkulator. I testklassen deler elevene seg på midten, åtte har brukt GeoGebra, åtte har løst den for hånd, mens en ikke har svart. Som i tidligere oppgaver forteller enkelte av elevene som valgte å benytte GeoGebra at grunnen var at det hadde med grafer å gjøre, og at det er raskere enn å regne for hånd. Flere har nok valgt metoden i mangel av andre løsningsstrategier, noe som illustreres gjennom Elev 3 sin forklaring:

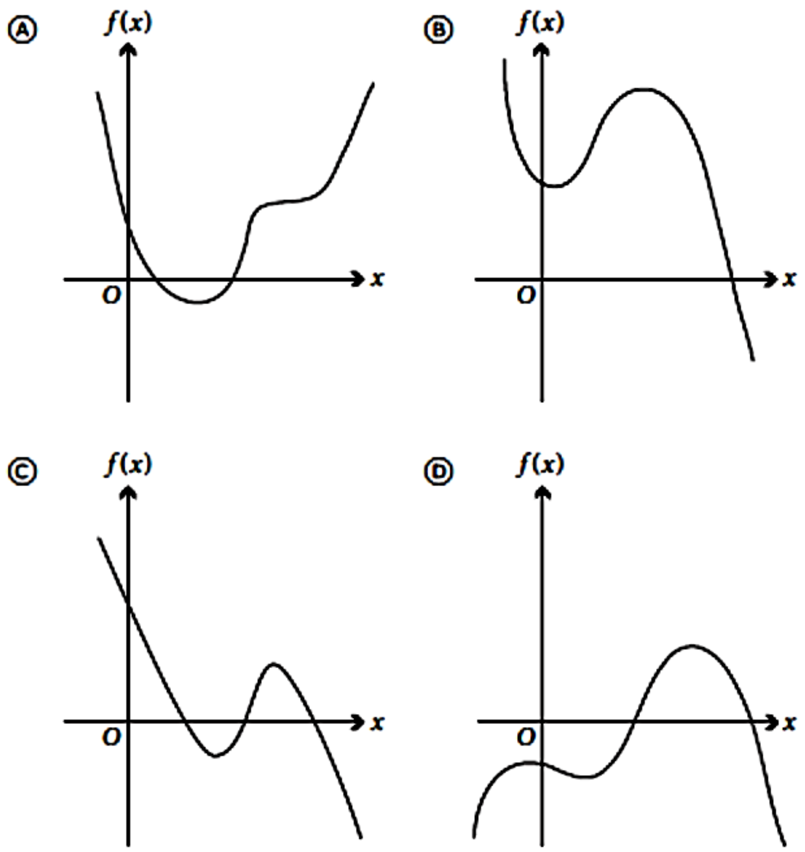
> *Ja, der rett og slett, hadde jeg ikke noe annet forslag til fremgangsmetode i hodet mitt, enn å forsøke meg fram. Og spesielt når det er sånn, poly.. Ja, sånn uttrykk med brøk. Så har vi vel stort sett hatt om det på GeoGebra, for det er jo ikke noe man, jobber så mye med for hånd. Eh. Så da var det vel rett og slett vane. Også når du skal prøve deg fram, som jeg skulle. Altså, dette her kan du jo løse ved regning også, så går jo det mye fortere og greiere i GeoGebra. Man kunne jo selvfølgelig lagd sånne tabeller med x og f av x verdier og sånn, men da hadde det jo tatt år og dag.*

Igjen ser vi at vane spiller inn når elevene løser oppgaver, for uttrykk med brøk «er jo ikke noe man jobber så mye med for hånd». Eleven peker på at oppgaven også kan løses for hånd, ved å lage tabeller med verdier for x og $f(x)$. Elev 1 har løst oppgaven på samme måte, ved hjelp av GeoGebra, og på spørsmål sliter han med å finne andre løsningsmetoder enn prøving og feiling. Selv om oppgaven inneholder triggerord, kan ikke elevene bruke en kjent løsningsalgoritme ved hjelp av digitale verktøy på samme måte som i oppgave 5. Jeg vil derfor si at framgangsmåten til de to elevene er en form for kreativ hjelpemiddelbruk. De bruker alle opplysningene i oppgaven, og anvender GeoGebra systematisk for å finne riktig svaralternativ.

5.1.8 Oppgave 8

Hvilken av grafene nedenfor kan ha alle disse egenskapene?

$$f(-1) > 0,\ f(3) < 0,\ f'(5) = 0,\ f''(5) < 0$$



	Test i R2		Norge	Internasjonalt
	m/hjelpemiddel	u/hjelpemiddel		
Riktig svar C	0 % (0 elever)	59 % (10 elever)	31 %	46 %
Galt svar	0 % (0 elever)	35 % (6 elever)	51 %	40 %
Ikke svart	6 % (1 elev)		18 %	14 %

I denne oppgaven skal elevene finne en graf som passer til de fire oppgitte egenskapene, hvor to av egenskapene dreier seg om forholdet mellom *x*-verdi og funksjonsverdi, mens de to andre handler om hvilke verdier førstederiverte og andrederiverte har når *x*-verdien er fem.

Den er innlemmet i prøven til testklassen for å kunne si noe om hvor flinke de er til å resonnere over grafer og opplysninger som er gitt. Siden mange av oppgavene i prøven kan løses ved hjelp av å tegne grafer i et digitalt verktøy, er det interessant å se i hvor stor grad elevene evner å vurdere informasjon knyttet til grafene. Utfordringen her ligger i at det ikke er oppgitt verdier på aksene, noe som fører til at elevene er nødt til å se flere av opplysningene i sammenheng. Et annet moment med oppgaven i en prøve som skal teste hjelpemiddelbruk, er om noen elever vil sjekke om GeoGebra kan hjelpe dem til å komme fram til løsningen. Oppgaven inneholder triggerordet «grafer» og handler åpenbart om koordinatsystemet, men i praksis er det likevel tilnærmet umulig å bruke hjelpemidler i løsningsarbeidet.

Norge skårer svakere enn både det internasjonale gjennomsnittet og samtlige referanseland på denne oppgaven, og Grønmo, Onstad og Pedersen (2010) peker på nettopp det at oppgaven ikke innbyr til bruk av kalkulator som en mulig årsak til de svake resultatene. Dette står i kontrast til oppgave 6 i prøven, som lå til rette for enkel bruk av kalkulator, og hvor norske elever leverte relativt gode resultater. I «Matematikk i motvind», hvor forfatterne kommenterer resultatene oppgave for oppgave, blir det etter denne oppgaven bemerket en tendens til at norske elever presterer spesielt svakt på oppgaver som ikke gir mulighet til enkel bruk av kalkulator (Grønmo et al., 2010). Nok en gang dukker spørsmålet opp, hvorvidt en dreining fra kalkulator til matematiske programmer på PC i norsk skole, kan ha noe å si for elevenes forståelse av funksjoner og grafer. Et annet spørsmål er hvordan disse hjelpemidlene har blitt brukt i undervisningen, og om også dette har endret seg noe de siste årene. Dersom kalkulatoren først og fremst ble brukt til å lære inn enkelte løsningsalgoritmer tastetrykk for tastetrykk, vil ikke det være spesielt utviklende for elevene, snarere tvert imot. Kanskje har matematikklærere fått en visuell gave gjennom oppblomstringen av dynamisk programvare for matematikk, i betydningen større muligheter til å vise elevene et bilde av den underliggende matematikken samtidig som de lærer bestemte løsningsmetoder.

Hvis vi ser bak resultatene fra oppgaven, finner vi at svaralternativ D er det mest vanlige feilsvaret i Norge, mens det er mer jevnt fordelt mellom A, B og D internasjonalt. Alternativ D stemmer overens med de tre siste opplysningene, men ikke med den første, som sier at funksjonsverdien til $x = -1$ er større enn 0. Dette er i utgangspunktet den enkleste opplysningen å sjekke, siden den ikke krever at man ser den i forbindelse med andre opplysninger. Sammenlikner vi med eksempelvis Nederland og Russland, land som leverte gode resultater både på denne oppgaven og på testen i sin helhet, ser vi at alternativ A er den mest vanlige feilen. Dette alternativet harmonerer med de tre første opplysningene, men ikke med den siste som handler om den andrederiverte, en opplysning som er mer krevende å tolke enn den første. Vi skal være forsiktige med å tolke dette i en bestemt retning, men det gir grunn til undring at så mange norske elever overser oppgavens enkleste opplysning. Vi skal komme tilbake til arbeidsmåter i matematikkundervisningen senere i oppgaven, og kanskje kan noe av grunnen være at endel elever er vant til å løse mange oppgaver raskt, uten å legge særlig vekt på å vurdere svaret i etterkant.

5.1.9 Oppgave 9

Oppgave 9 er nok en oppgave som ikke er frigitt av TIMSS. I oppgaven skal man finne arealet avgrenset av to funksjoner, der den ene er en førstegradsfunksjon og den andre er en andregradsfunksjon. Elevene får ingen svaralternativer, men beskjed om å vise framgangsmåten. Oppgaven er valgt til prøven fordi den inneholder ordene «grafene til funksjonene», samt to eksplisitt gitte funksjonsuttrykk. Dette gir muligheten til å løse problemet på to måter, der den ene innebærer bruk av grafisk kalkulator eller GeoGebra. Dersom man vil løse oppgaven ved regning må man først identifisere hvor de to funksjonsverdiene er like, for å finne x-verdiene som blir grenser i de bestemte integralene. Deretter må man integrere de to funksjonene, og regne ut integralet bestemt av de gitte x-verdiene. Til sist finner man arealet ved å trekke det største integralet fra det minste. Den andre muligheten er å tegne grafene med et hjelpemiddel, og bruke en kommando som gir integralet mellom to gitte grenser. For å komme fram til arealet avgrenset av grafene må man også her finne differansen mellom integralene til slutt. Fordelen med denne metoden er at man får hjelp til å se hvor grafene krysser, og dermed hvor det er aktuelt å finne integralene.

	Test i R2		Norge	Internasjonalt
	m/hjelpemiddel	u/hjelpemiddel		
Riktig svar	29 % (5 elever)	6 % (1 elever)	20 %	19 %
Galt svar	0 % (0 elever)	24 % (4 elever)	34 %	52 %
Ikke svart	41 % (7 elever)		46 %	29 %

Andelen med riktig svar forteller at dette er en vanskelig oppgave, der norske elevers resultater er marginalt bedre enn det internasjonale gjennomsnittet. Det, relativt sett, gode norske resultatet kan skyldes flere ting, blant annet at integrasjon er en del av elevenes pensum i 3. klasse, og at de derfor har emnet friskt i minne. En annen mulig årsak er igjen at oppgaven ligger godt til rette for bruk av kalkulator eller GeoGebra. Hvis vi ser nærmere på resultatene fra et par av de frigitte oppgavene i TIMSS Advanced blir kalkulatorargumentet enda tydeligere. Sammenliknet med andre oppgavetyper, skårer norske elever relativt godt på integraloppgaver i forhold til det internasjonale gjennomsnittet. Det er likevel en forskjell på oppgaver som omhandler ubestemte integraler, og ikke ligger til rette for kalkulatorbruk, kontra oppgaver om bestemte integraler, der kalkulatoren er et effektivt hjelpemiddel. Norske elever har best resultat på sistnevnte type oppgaver, noe som tyder på at kalkulatoren har vært til god hjelp. Statistikken fra TIMSS Advanced kan denne gangen underbygge teorien, fordi den skiller mellom svar oppnådd ved regning og de som er funnet med kalkulator. Av de norske elevene som klarte oppgaven hadde 63 prosent gjort det gjennom bruk av kalkulator. Internasjonalt er tallene noen ganske andre, kun 26 prosent av de som klarte oppgaven hadde brukt kalkulator.

Holder vi dette opp mot svarene i testklassen, finner vi samme tendens. De fleste av de som fant riktig svar har brukt GeoGebra, i tillegg til at det var mange som ikke svarte på oppgaven. Det skal tillegges at prøven ble avholdt mens klassen var midt i en periode hvor de jobbet med integralregning, noe som til en viss grad kan ha påvirket resultatene på denne og den neste oppgaven. I og med at svarene var såpass sammenfallende mellom testklassen og elevene som deltok i undersøkelsen i 2008, er det naturlig å tro at tanker og begrunnelser elevene deler i mine intervjuer er representative for langt flere enn dem selv. Elev 1 er blant de som ikke svarte på oppgaven, men forteller at han hadde gjort et forsøk i GeoGebra.

Intervjuer: Den har jeg ikke funnet noe på?

Elev 1: Nei, det kan være jeg fikk litt liten tid her, det husker jeg ikke, men.. Eller at jeg prøvde meg fram i GeoGebra og ikke fant ut noe svar.

Intervjuer: Jaha?

Elev 1: Fordi da.. Avgrenset av grafen til funksjonen, finn, ja.. Ja, ja, den skrev jeg inn. Det var den, den så vel.. Jeg husker ikke helt hvordan den så ut. Men, det hadde jeg faktisk ikke.. Det husket jeg ikke hvordan man gjorde. Jeg husker hvordan man fant sånn areal under grafer, men jeg husker ikke hvordan man fant areal inni en sånn.. Av to forskjellige grafer, så da tror jeg jeg bare hoppet over den.

Selv om eleven ikke hadde skrevet noe på prøven, ser vi at han har prøvd seg fram for å finne en mulig løsning, og det er naturlig å tro at dette er tilfellet for flere av elevene i den store gruppen som ikke svarte på denne oppgaven. Vi kan gjenkjenne flere grunner til at eleven velger å bruke digitale hjelpemidler. Først og fremst kjente han ikke noen bestemt løsningsmetode, og tenkte at GeoGebra kunne være til hjelp. Eleven har på tidligere oppgaver fortalt at han vurderer GeoGebra som mulig hjelpemiddel så snart oppgaven handler om grafer og koordinatsystemer, elementer som absolutt er til stede her. Ut fra sitatene over virker det som eleven har lyktes med å tegne inn grafene og skjønt hvilket areal han skal finne, men at det så stopper opp fordi han ikke kjenner noen kommando i GeoGebra som gir arealet mellom to grafer. Siden han forteller at han kjenner en metode for å finne areal under grafer, kan vi fastslå at problemet ligger i å se at man kan finne det aktuelle arealet ved å regne ut differansen mellom arealene under de to grafene. Vi skal komme tilbake til Elev 1 og dette problemet i gjennomgangen av den neste oppgaven, som også omhandler arealet mellom to grafer.

Elev 3 og Elev 4 kom begge fram til riktig svar med å bruke GeoGebra, og forteller at de nok ikke ville klart oppgaven uten hjelpemiddelet. Elev 3 har tidligere oppgitt at han bruker digitale hjelpemidler der det er mulig, og denne oppgaven er lett å kjenne igjen i så måte. Videre føler han seg trygg på hvordan funksjonene kan integreres, men at problemet ligger i å finne grensene for integrasjonen. Utfordringen knyttet til å kombinere kunnskap om funksjoner med kunnskap om likninger har vi vært innom tidligere, men det synes vanskelig å si noe om hvorvidt bruk av digitale hjelpemidler har påvirket elevene på dette feltet. Elev 4 beretter om et annet problem, knyttet til hvordan man integrerer for hånd.

> *Intervjuer: Var det noe grunn til at du brukte GeoGebra på den?*
>
> *Elev 4: Ja, eller det er jo fordi vi liksom.. Vi har liksom lært. Akkurat, om det. Å bruke det i GeoGebra. (ler) Jeg syns det er veldig greit. Enkelt. Da slipper jeg på en måte å, integrere opp så mye og.*
>
> *Intervjuer: Men har dere lært. Dere har lært å løse det i GeoGebra, har dere lært å løse det for hånd og?*
>
> *Elev 4: Ja, vi har det. Det er at du kan ta det minus.. (mumler) At jeg kan ta den, også minus den, eller. De to funksjonene minus hverandre da, og så kan jeg ta og integrere. Nei, men det hadde. Nei. Det blir kanskje feil. Da kunne jeg heller.. (mumler og ser på oppgaven) Nei, den tror jeg jeg faktisk bare kan i GeoGebra.*

I motsetning til Elev 1, klarte Elev 4 å løse oppgaven i GeoGebra, og har altså innsett at det avgrensede arealet er differansen mellom de to bestemte integralene. Problemet ligger her i å klare og overføre det han har gjort i GeoGebra, til å kunne gjøre det samme ved regning. Vi ser av det siste sitatet at eleven er på rett spor, men ikke klarer å komme fram til det endelige svaret. Grunnen til at GeoGebra ble valgt i utgangspunktet var at det var enkelt, siden man slipper «å integrere opp så mye». Som matematikklærer må man være bevisst i møte med denne type tankegang, dersom man ønsker at digitale hjelpemidler skal ha en positiv effekt på elevenes forståelse. Parallellen mellom det man kan finne ved regning og det man kan finne ved hjelp av digitale verktøy må vektlegges, slik at løsninger i GeoGebra ikke bare blir løsrevne algoritmer som gir raske svar. Et eksempel på at elever lar hjelpemidlene erstatte egen refleksjon fant vi i besvarelsene på denne oppgaven, hvor en elev skrev at «GeoGebra mangler kommando for areal mellom grafer».

5.1.10 Oppgave 10

Denne oppgaven, som består av to deler, har ikke blitt frigitt. I del A får vi oppgitt funksjonsuttrykket for to parabler, som krysser hverandre i to punkter på *x*-aksen, kalt A og B. Grafen til funksjonene er skissert i et koordinatsystem ved siden av teksten. Oppgavens del A er å finne lengden til den rette linjen mellom punkt A og punkt B på *x*-aksen. Grunnen til at oppgaven ble valgt ut til prøven i testklassen var at den kunne løses på to måter, enten ved å tegne grafene i GeoGebra eller ved å finne punkt A og B ved regning.

Del A	Test i R2		Norge	Internasjonalt
	m/hjelpemiddel	u/hjelpemiddel		
Riktig svar	53 % (9 elever)	29 % (5 elever)	52 %	37 %
Galt svar	0 % (0 elever)	6 % (1 elever)	27 %	27 %
Ikke svart	12 % (2 elever)		21 %	36 %

De norske resultatene på denne oppgaven er klart bedre enn det internasjonale gjennomsnittet, og av referanselandene er det kun Nederland som skårer bedre. Vi ser av resultatene i testklassen at over halvparten av elevene brukte GeoGebra, og det er grunn til å tro at en relativt stor andel av de norske elevene benyttet kalkulatoren som hjelpemiddel i undersøkelsen i 2008. Med eksplisitt gitte funksjonsuttrykk ligger oppgaven godt til rette for slike løsningsmetoder; kanskje ligger noe av grunnen til de sterke norske resultatene nettopp der. Igjen, som vi har sett også på andre lignende oppgaver, er det få elever som kommer fram til feil svar etter å ha brukt GeoGebra. Dette tyder på at elever som bruker slike hjelpemidler har en klar plan med bruken, trolig en løsningsmetode de har lært i undervisningen og blitt vant til å benytte. Et utdrag fra intervjuet med Elev 4 er med på å underbygge teorien om at vane påvirker elevers bruk av GeoGebra.

> *Intervjuer: Husker du hvorfor det ble GeoGebra på den, del A her?*
>
> *Elev 4: Ja, det syns jeg var greit, liksom. For da, ja, en grei måte å finne det fort på. For det er sånne typer oppgaver da så, da kommer det fort, slipper jeg å regne så veldig mye.*
>
> *Intervjuer: Ja. Hva mener du med type oppgaver?*
>
> *Elev 4: Jo, når det er. Når det står en funksjon sånn, veldig klart. Det er sånn, jeg bruker GeoGebra når det er liksom, mye sånn funksjoner og, når det er type den, sånne typer oppgaver da. Med funksjoner og, når det er på en måte, ja.*
>
> *Intervjuer: Er det fordi dere har lært mest om GeoGebra i det?*
>
> *Elev 4: Ja, det er i de kapitlene, vi bruker det mest, har brukt det mest. Ja, sånn når det liksom står sånn. Det er sikkert det og, når det liksom står sånn, på en sånn tradisjonell form som jeg er vant til. Sånn y er lik, når den står sånn, da tenker jeg med en gang sikkert. Åja, GeoGebra! At det passer, sånn, ja.. Jeg er vant til det da. For det at sånn som den her da, den der (peker på oppgave 1), så er ikke jeg på en måte vant til at er en GeoGebraoppgave da, hvis du skjønner.*

Man kan kjenne igjen tankegangen fra tidligere sitater i dette kapittelet, som viser at elevers bruk av hjelpemidler avhenger av at oppgaven er utformet «på en sånn tradisjonell form som de er vant til». Det er lite som tyder på at de gode norske resultatene på denne oppgaven fra TIMSS Advanced 2008 skyldes noe annet enn at oppgaven ligger fint til rette for hjelpemiddelbruk. Det er med andre ord grunn til å tro at tankene til elev 4 gjelder for flere enn han selv.

I oppgavens del B får vi oppgitt at området mellom grafene skal males. Teksten gir en pris per kvadratmeter maling, og oppgaven er å regne ut hva det vil koste å male området. Oppgaven er satt inn i en praktisk kontekst, slik at del B ikke refererer til området som arealet mellom to grafer, men til et konkret fysisk område som også blir omtalt i del A. For å løse oppgaven må elevene se at det fysiske området svarer til arealet mellom grafene, regne ut dette arealet, enten i GeoGebra eller for hånd, for så å multiplisere arealet med prisen per kvadratmeter. Oppgaven er forholdvis lik oppgave 9, der man skulle finne arealet avgrenset av grafene til to funksjoner, men det krever noe tenkearbeid fra elevene for å se at oppgaven hovedsakelig dreier seg om integrasjon.

Del B	Test i R2		Norge	Internasjonalt
	m/hjelpemiddel	u/hjelpemiddel		
Riktig svar	29 % (5 elever)	12 % (2 elever)	30 %	17 %
Galt svar	6 % (1 elev)	18 % (3 elever)	31 %	34 %
Ikke svart	35 % (6 elever)		39 %	49 %

Oppgaven peker seg ut som vanskelig, med et internasjonalt gjennomsnitt på 17 prosent. Faktisk var det bare fire av deltakerlandene som kunne skilte med en løsningsprosent som var høyere enn 10, Nederland, Russland, Norge og Sverige. Nederland og Russland skiller seg ut med at en lav andel av årskullet deltok i undersøkelsen, og disse elitistiske utvalgene var undersøkelsens to beste (Grønmo et al., 2010). De gode resultatene til Norge og Sverige er mer overraskende, siden begge land leverte forholdvis svake resultater når vi ser undersøkelsen under ett. Nok en gang er det derfor naturlig å peke på hjelpemiddelbruk for å forklare de sterke norske resultatene på denne oppgaven. Denne antakelsen styrkes av at resultatene på tilsvarende oppgaver som ikke innbyr til bruk av digitale verktøy, langt fra er like gode.

En slik forskjell i skår mellom oppgaver innen samme emne, samt svar elevene gir i intervju, gjør det nok en gang betimelig å stille spørsmålet om hvorvidt elevene i for stor grad lener seg på hjelpemidlene, og med det ikke legger nok arbeid i å forstå og bruke matematiske begreper. Flere skrev i besvarelsene sine at de «husker ikke formelen for GeoGebra», men at oppgave 9 og 10B ville vært lett om de husket kommandoen. Slike uttalelser vitner om et fokus på resultater og svar, mens løsningsprosessen og den underliggende matematikken til en viss grad blir neglisjert. Elev 1 oppsummerer dette på en god måte, når han får spørsmål om bruken av hjelpemidler som GeoGebra og kalkulator påvirker matematikkferdighetene hans i noen retning:

Altså, jeg vil si at det påvirker kanskje mest negativt. Det kan være at jeg får flere riktige svar, men at jeg ikke har det, skjønt det svaret i hodet.

Jeg kommer tilbake til mulige følger av resultatorientert matematikkundervisning i kapittel 6.

5.2 Elevenes syn på digitale hjelpemidler

5.2.1 Positive sider

Etter å ha gått igjennom prøven oppgave for oppgave, fikk elevene spørsmål om hvilke positive og negative sider de så ved bruk av kalkulator og digitale hjelpemidler i matematikk. Svarene her samsvarer i stor grad med det vi har sett på i gjennomgangen av oppgavene. Samtlige trekker fram det visuelle aspektet som den viktigste fordelen med hjelpemidlene, og mener det bidrar til å forstå begreper knyttet til funksjoner og grafer bedre. Elev 2 gir uttrykk for at digitalt verktøy har vært til god hjelp i emner som derivasjon og integrasjon:

I GeoGebra, sånn, jeg tror man forstår det bedre, når man liksom ser en graf for seg, og hvis jeg har en oppgave da, hvor jeg på en måte får en graf også liksom, skal finne topp og bunnpunkt eller, eh. Finne arealet under, på en måte, så ser jeg det bedre for meg, hvis jeg på en måte, har tegnet det på GeoGebra, enn hvis jeg ikke har det, men bare liksom, gjette skråstrek tenke meg til i hodet da.

Elev 4 peker også på fordelen med å få matematikken illustrert, selv om tidsbruken er det første hun trekker fram som positivt med GeoGebra:

Ja, det går jo fortere, rett og slett, med sånn GeoGebra. Også føler jeg, det er jo egentlig ganske deilig å få liksom grafen opp, så får du liksom illustrert, så får du litt, ja. Du får liksom se hva det egentlig er. En funksjon er jo, den kan være litt vanskelig å forestille seg.

Svarene i de andre intervjuene går i samme retning som disse utdragene, men Elev 3 trekker det enda lenger, og peker på positive sider som først har blitt mulig etter GeoGebras inntog i skolen.

Elev 3: På andre ting, sånn som GeoGebra, så er det veldig kjekt, syns jeg. Og det bedrer vel egentlig forståelsen, for du kan, for eksempel da vi lærte om sånn, eh, funksjoner med phi og a og, også periodiske og sånn.

Intervjuer: Ja.

> *Elev 3: Så kan du legge inn glidere og sånn, og det var veldig greit når (lærerens navn) gjennomgikk det sånn, fordi at da kunne du se hva de forskjellige verdiene faktisk betydde for hvordan grafen ble seende ut.*

Muligheten til å bruke såkalte glidere i arbeid med funksjoner har man ikke hatt på grafiske kalkulatorer, og det har med andre ord ikke vært tilgjengelig for elevene som deltok i undersøkelsen i 2008. Glidere gir mulighet til å endre verdier i funksjonsuttrykket dynamisk, for så å se hvordan dette påvirker grafens utseende. Ved å gjøre dette gjennom en prosjektor i klasserommet, har læreren gode forutsetninger for å la elevene resonnere og diskutere problemløsingsstrategier i fellesskap. I kapittel 6 ser vi nærmere på hvor vanlig slike undervisningsmetoder er i norsk matematikkundervisning.

En annen positiv side elevene trekker fram, som vi har sett på i gjennomgangen av oppgavene, er at man raskere kommer fram til et svar gjennom å bruke GeoGebra og kalkulator. Dette identifiserte vi som en av hovedårsakene til at elevene velger å bruke digitale verktøy framfor penn og papir på en gitt oppgave. På en annen side, som vi skal ta for oss om litt, ser elevene også negative sider ved at tidsbruken går ned.

Den siste positive som ble nevnt, var at man kan løse store problemer ved å bruke hjelpemidler. Som Elev 1 uttalte, «du får jo ikke løst store problemer i hodet, på en måte». Det at elevene får muligheten til å delta i kognitive aktiviteter som ellers ville ligget utenfor deres rekkevidde blir trukket fram av Persson (2009) som et av hovedargumentene for bruk av kalkulator i undervisningen. Muligheten til å løse komplekse problemer hjelper trolig også på motivasjonen, og i så måte skapes en vinn-vinn-situasjon. Utfordrende oppgaver kan være med på å peke mot framtidige arbeidssituasjoner, en linje Elev 3 trekker opp når han gir sitt syn på hjelpemidler:

> *Jeg syns jo egentlig man burde ha hjelpemidler tilgjengelig hele tiden, fordi det er sånn det kommer til å bli i arbeidslivet, tenker jeg. Altså, la oss si at du er ingeniør, så er det ingen som reagerer på at du bruker en kalkulator eller at du bruker ett eller annet program. Altså, du må jo gjøre det, for du kan ikke bomme i hoderegning og sånn, det kan jo få litt konsekvenser.*

5.2.2 Negative sider

Ut fra dette kan man nesten bli ledet til å tro at elevene ikke finner noen negative sider ved kalkulator og digitale hjelpemidler. Så er ikke tilfellet. Elevene trekker fram en negativ utvikling i hoderegning og at man blir dårligere til å se for seg matematikken som to sider som blir påvirket i gal retning av hjelpemiddelbruken. Det er interessant å merke seg at denne bevisstheten er klarest hos de elevene som brukte GeoGebra mest på testen. Kanskje er dette naturlig, siden det er de elevene som merker forskjellen best, men det forteller uansett at kunnskap om problematiske sider ved hjelpemidler ikke nødvendigvis påvirker bruken. Dette illustreres av et utdrag fra intervjuet med Elev 1, der han tar for seg sin egen hjelpemiddelbruk:

> *Ja, negative sider er vel at du ikke helt får med deg, du bare skriver tomt inn en ting inn i kalkulatoren, også gir den deg et svar, men du får ikke øvd deg på å se hvordan den gjorde det, på en måte, vil jeg si. Og ja, og en annen ting, negativ med GeoGebra er det.. At med en gang jeg ser en graf, så skriver jeg den inn i GeoGebra, jeg gidder ikke tenke. Du.. Du tenker mindre på matte'n egentlig. (...) Hvis jeg får lov til å bruke hjelpemidler, så tror jeg jeg bare går rett på hjelpemidler. Tenker det er ikke noe vits i å bruke lenger tid enn nødvendig.*

Elev 3, som brukte GeoGebra på 9 av 10 oppgaver, ser også denne negative siden med utstrakt bruk av hjelpemidler:

> *Sånn derre, småregning i hverdagen, blir nok kanskje litt tyngre når man får bruke så mye hjelpemidler. Også, blir man kanskje dårligere i det å se for seg ting, for at hvis du gjør noe for hånd, så ser du kanskje utviklingen underveis, også ser du at du begynner å nærme deg det. Eh, mens når du bruker en PC eller en kalkulator, så trykker du inn det du skulle ha svaret på, også er svaret der med en gang. Så det er kanskje litt ulempe.*

Uttalelser som at man tenker mindre på matematikken og at man blir dårligere til å se for seg ting, bør være et varsko til både elever og lærere. Når vi har i bakhodet at Elev 1 og Elev 3 er elever som bruker hjelpemidlene mye, til tross for denne bevisstheten, framstår det klart at elever trenger tydelig ledelse fra læreren på dette området. Sett fra elevens ståsted gir hjelpemidlene mange og riktige svar, så hvorfor skal man bruke dem mindre, og med det klare færre oppgaver? Dette spørsmålet skal vi komme tilbake til når i neste kapittel.

I alle fire intervjuer nevner elevene at evnen til å regne i hodet har blitt svekket, og forteller at de bruker kalkulator til enkle utregninger i så godt som hver time. Det virker som det er to hovedgrunner til den hyppige bruken. Den ene handler om noe vi har vært inne på tidligere, nemlig vane. Elevene sier de er vant til å bruke kalkulator på de fleste regneoperasjonene, noe som fører til at de bruker den også på helt enkle utregninger. Dette illustreres gjennom et utdrag fra intervjuet med Elev 3.

Intervjuer: Hvor går grensa mellom det du tar i hodet, og det du bruker kalkulatoren til?

Elev 3: Eh, altså. Jeg kan bruke kalkulator til ganske små stykker, men så hender det jeg sier til meg selv at det her kunne du vel faktisk tatt i hodet, også bruker jeg kanskje hoderegning resten av den arbeidsøkten.

Intervjuer: Jaha..

Elev 3: For noen ganger så regner jeg ut sånn, åtte pluss fire er lik tolv på kalkulatoren, litt sånn, altså, det er litt sånn uvettig, sånn, du tenker ikke over det for du har brukt den på alt annet. Også tenker jeg meg litt om, og så regner jeg ut sånne typer stykker, og større ting også, i hodet.

Denne årsaken til å bruke kalkulator hyppig er forståelig, og i seg selv ikke noe stort faresignal. Når man har brukt kalkulatoren til å regne ut eksempelvis kvadratrøtter, er det ikke unaturlig at man bruker den også i de påfølgende utregningene, selv om disse er overkommelige å ta i hodet. Problemet oppstår idet vi ser hva den utstrakte bruken av hjelpemidler fører til, og da er vi over på den andre grunnen elevene gir for å bruke kalkulator ofte; den at de ikke stoler på sin egen hoderegning. Det virker som hjelpmiddelbruken har tatt fra dem noe av selvtilliten når det kommer til matematikk, en utvikling som i så fall er illevarslende. Vi skal se på et litt lengre utdrag fra intervjuet med Elev 2, som er blant testklassens beste.

Intervjuer: Hvor lett, i gåsetegn, skal sånne regninger være før du tar dem i hodet?

Elev 2: Hmm.. (fniser) Jeg.. (ler) Jeg pleier liksom ikke.. Da skal de være veldig lette. Altså, jeg kan jo på en måte sånn. Det kommer litt an på. Fordi at, jeg kan jo på en måte ta sånn, tre ganger fem, det ville jeg tatt i hodet. Men, for eksempel, sånn som tjuefire pluss åtte, det ville jeg tatt på kalkulatoren. Men jeg vet ikke helt hvorfor. Men det er bare det at, liksom, tre ganger fem, det kan jeg, det er femten. Mens liksom..

Intervjuer: Ja. Ni ganger sju da?

Elev 2: Nei, jeg er så utrolig.. Nei, vent litt da. Det er sekstitre.

Intervjuer: Ja.

Elev 3: Men da må jeg tenke, ikke sant. Og når jeg får sånn, for jeg vet at jeg er veldig dårlig i syv-ganger'n. Også, mens.. Og da må jeg tenke, ni-ganger'n. Og når jeg tenker ni-ganger'n, da må jeg ta, liksom, sytti minus syv, og da tar det lang tid, og jeg vet at det tar lang tid, så da bare skriver jeg det inn på kalkulatoren med en gang, og da går det litt sånn fortere. Men sånn, tre-ganger'n er jeg veldig god på, og fire-ganger'n og fem-ganger'n, også to og en da, selvfølgelig. Og, ja, det er egentlig syv *og åtte-ganger'n, som jeg er veldig dårlig på, også. Ni-ganger'n, da tenker jeg veldig ofte, okei, åtti minus åtte, syttito. Sånn, ja..*

Intervjuer: Ja. Men stoler du på din egen hoderegning?

Elev 2: Hm, nei.. Sånn som på del en da, veldig ofte, så er det sånn at hvis man får, for eksempel.. Ja, jeg vet ikke jeg, nå kommer jeg ikke på noe bra. For eksempel, trettifire delt på to, så må jeg liksom. Så regner jeg ut det i hodet, men så, på en måte, så må jeg skrive ned hvordan jeg gjør det, sånn at jeg er helt sikker på at jeg tenker riktig i hodet, på en måte. Ja, jeg kan liksom ikke.. Nei..

Eleven er ikke alene om å bruke kalkulator på addisjons- eller subtraksjonsstykker med tieroverganger. Selv om så og si alle kan regne dette i hodet om de vil, sier det noe om deres tanker om egen hoderegning når de mener det går fortere å taste stykket inn på en kalkulator. Et annet aspekt ved dette er at man mister noen muligheter til å se løsninger hvis man ikke har endel formler og regneteknikker i hodet. Et eksempel kan være faktorisering av algebraiske uttrykk, som det ikke er helt enkelt å utføre med kalkulator. I sum fører dette til at vi nok kan gi Grønmo, Onstad og Pedersen (2010) delvis rett i sin antydning som at endel elever bruker hjelpemidlene som en krykke. Avslutningsvis i dette avsnittet skal vi ta med oss noen ord fra Elev 1, som illustrerer sin egen hjelpemiddelbruk på morsomt vis.

Elev 1: Hvis en unge kom og spør meg om integralet til det, så måtte jeg hatt PC for å kunne hjelpe han.

M: Ja, skjønner.

E: Så jeg blir på en måte mindre dyktig av det. Jeg bare vet hvordan man kan operere en PC som finner svaret, men jeg skjønner ikke helt matte'n i det, på en måte da.

5.2.3 Foretrukne oppgavetyper

Mot slutten av intervjuet fikk elevene spørsmål om de foretrakk noen oppgavetyper framfor andre, med hovedvekt på rene regneoppgaver kontra problemløsningsoppgaver, det som gjerne kalles «grubleoppgaver». Alle fire kunne ganske enkelt fastslå at de var mest glade i rene regneoppgaver, og oppga ulike grunner for valget. Hovedgrunnen virker å være at problemløsningsoppgaver gjerne tar lang tid, og elevene føler at det er litt tilfeldig om de kommer fram til et svar eller ikke.

Elev 3: Jeg er nok mer glad i regneoppgaver. For det at det blir, på sånn, grubling så føler ofte at det fører til å så lite og at jeg ikke kommer noen vei. Eh, så, nei, jeg er nok ikke så veldig glad i sånn grubling, egentlig.

Intervjuer: Nei, hvorfor foretrekker du regneoppgavene da?

Elev 3: Det har vel litt med at jeg har en oppskrift jeg kan følge. Eh, jeg vet litt, vet litt hvor jeg skal starte og sånn. Men altså, absolutt, det kan være morsomt med grubleoppgaver en gang i blant. Hvis de ikke er for vanskelige eller omfattende.

Eleven opplever at grubling over en oppgave ikke fører til noe, og foretrekker oppgaver der han har en oppskrift å følge. Dette synet deles av de andre elevene, Elev 4 er heller ikke spesielt positiv til oppgaver uten en kjent framgangsmåte:

Ja, jeg er kanskje ikke, sånn, så veldig kreativ til å finne på sånne nye løsninger, og måter å løse en oppgave på. Eh.. Ja, jeg syns kanskje det er litt vanskelig.

Det at problemløsningsoppgaver er vanskelige, er naturligvis en forståelig grunn til å foretrekke andre oppgavetyper. For å utvikle seg matematisk er det likevel en forutsetning å utvikle seg som problemløser. For lærere blir det da viktig å stimulere til glede over å løse problemer, og legge til rette for at elevene får utviklet sine ferdigheter på dette området. Som vi skal se av det neste utdraget, er det lett å gi opp når problemene melder seg.

Elev 1: Jeg syns det er lettere når det står bare en graf, og så skal jeg løse den, også er det en til graf, så skal jeg løse den. Slipper vi alt det der Lisa gikk til.., ja..

Intervjuer: Ja, så den.. Du er mer.. Forstår jeg deg rett hvis du er mer glad i å løse oppgaver og få til mange etter hverandre..

Elev 1: Ja!

Intervjuer: ..ganske kjapt, enn å sitte og gruble og tenke: hmm.. Hvordan..?

Elev 1: Ja, det er jeg nok. Altså, jeg syns det er morsomt å løse problemer, hvis det er et spennende problem. Men så.. Gir jeg opp ganske fort, egentlig. Holder ikke på med den noe lenge før jeg gir opp.

Vi ser at elevene foretrekker å løse flere like oppgaver etter hverandre, framfor å bruke tid på å løse en mindre rutinepreget oppgave. Det kan likevel spores en viss glede over å løse grubleoppgaver, en glede vi kan finne antydninger til også hos Elev 2 i det neste intervjuutdraget.

Elev 2: Jeg vet ikke, sånn grubleoppgaver, jeg føler det er så veldig tilfeldig hvis jeg finner ut, på en måte, eller, hvis jeg finner løsningen. Så jeg liker de egentlig ikke så veldig godt. Fordi jeg tror liksom ikke jeg er smart sånn, jeg er mer sånn, flink til å lære meg metoder, sånn utregningsmetoder og sånn da. Så jeg liker nok det bedre. Og *ja, regne ut, mer sånn.. Løse oppgaver, sånne oppgaver som er i matteboka da, ikke sånne grublenøtter man finner på nettet og sånn.*

Intervjuer: Ja. Hvorfor foretrekker du mattebokregneoppgaver?

Elev 2: Jeg vet ikke, jeg. Det er på en måte, da vet jeg hva jeg skal gjøre. Og det står liksom, sånn gjør man. Men så, i liksom grubleoppgaver, det kan jo være gøy det og, men det er liksom så, ofte jeg ikke får det til, og da syns jeg ikke det er så veldig gøy.

Elev 2 er enig med Elev 3 i at oppgaver der man kjenner en bestemt framgangsmåte er å foretrekke, og alle elevene vil heller løse flere forholdsvis like oppgaver enn å jobbe lenger med én. Det er fristende å spørre om Bibelens ord om at man høster som man sår gjelder også i norsk matematikkundervisning, siden vi i Norge bruker mye tid på å løse oppgaver som likner på eksempler i læreboka (Grønmo et al., 2010). Det skal sies at dette er en arbeidsmåte som er svært vanlig i alle land, men Norge skiller seg ut ved å legge langt mindre vekt på andre arbeidsmåter, som å «diskutere strategier for problemløsing», «velge egne framgangsmåter for å løse sammensatte problemer» og «diskutere resonnementene våre» (Grønmo et al., 2010). Med dette i bakhodet er det kanskje ikke rart at alle elevene som ble intervjuet foretrakk standard regneoppgaver. En mer utførlig diskusjon om dette temaet kommer jeg tilbake til i neste kapittel.

6 Oppsummerende diskusjon og konklusjoner

I dette kapittelet tar jeg for meg hovedfunnene i forrige kapittel mer tematisk, med fokus på å besvare mine to problemstillinger. For å sette resultatene inn i et større bilde, viser jeg til teori fra kapittel 3 der det er hensiktsmessig. På bakgrunn av dette antyder jeg mot slutten av kapittelet mine tanker om mulige konsekvenser funnene kan ha for matematikkundervisningen i Norge.

6.1 Hvordan bruker elever digitale hjelpemidler?

Min hovedproblemstilling er:

Hvordan bruker norske elever grafisk kalkulator og GeoGebra i oppgaveløsing, og hvordan påvirkes bruken av oppgavens utforming?

Jeg ser i dette underkapittelet på funn knyttet til første del av problemstillingen. Resultatene i både TIMSS Advanced 2008, min test og mine intervjuer tyder på at elevene først og fremst bruker hjelpemidlene i arbeid med oppgavetyper der de er vant til å bruke digitale hjelpemidler. I TIMSS Advanced var de norske resultatene, relativt sett, gode på oppgaver som handlet om funksjoner og grafer, og som lå til rette for hjelpemiddelbruk. På oppgaver innen det samme temaet som stilte større krav til resonnement var resultatene derimot ikke like bra. Elevene oppga også at de brukte den grafiske kalkulatoren mest til å tegne grafer til funksjoner og til å løse likninger. Hvis vi ser dette i lys av informasjonen elevene ga i mine intervjuer, virker det som mye av hjelpemiddelbruken er knyttet til enkle løsningsalgoritmer på oppgaver om funksjonsdrøfting og integrasjon. Brukt på denne måten blir hjelpemidlene et verktøy som gir riktige svar, uten at man får utnyttet de medierende egenskapene til instrumentene, egenskaper Persson (2009) og Rivera og Becker (2004) understreker som sentrale grunner for å bruke dem i undervisningen. Som vi kan se, blant annet av svarene på del C i oppgave 6, finnes det flere eksempler på elever som bare klarer enkelte oppgaver ved hjelp av GeoGebra. Hjelpemidlene blir da det Fuglestad (2009) betegner som sorte bokser – instrumenter som utfører beregninger uten at elevene vet hvilke beregninger som blir gjort.

Bruken av digitale hjelpemidler til å løse det vi kan kalle rutinepregede oppgaver, der elevene kjenner en framgangsmåte med digitalt verktøy, skiller seg altså ut som det klart mest vanlige bruksområdet. En annen anvendelse, som er langt mer sjelden, er å gripe til digitale verktøy når man er usikker på hvordan et problem kan løses. Jeg deler denne typen bruk inn i to kategorier, etter hvor målrettet eleven er idet han starter med oppgaven. Den ene kategorien kaller jeg *kreativ*, og kjennetegnes av at eleven har en idé om hvordan man kan komme fram til en løsning, uten at løsningsmetoden er en kjent algoritme. Eleven bruker da hjelpemiddelet til å teste ut om ideen kan lede fram til en løsning, og må så anvende sine kunnskaper i det aktuelle temaet, for å vurdere om løsningen er rimelig eller ikke. Denne framgangsmåten kan kategoriseres under det Lithner (2003) kaller plausible reasoning, og kjennetegnes av at man må bruke de underliggende matematiske egenskapene i resonnementet. Metoden forutsetter en form for relasjonell forståelse (Skemp, 1976), og vi ser av resultatene fra forrige kapittel at det stort sett er sterke elever som benytter seg av denne metoden. Den andre kategorien kan vi kalle *famlende*, og blir brukt når eleven ikke har noen spesielle tanker om hvordan en oppgave kan løses. Det mest vanlige er da å hoppe over oppgaven, noe som ikke faller inn under denne kategorien, men vi har sett enkelte eksempler på at elever prøver seg fram med digitale hjelpemidler. Tanken bak bruken er at en visuell framstilling av problemet kan gjøre det lettere å komme på et forslag til løsningsmetode. Siden man i utgangspunktet ikke har noen klar idé, leder denne kategorien fram til færre riktige svar enn den kreative kategorien.

Et annet bruksområde vi har sett eksempler på i intervjuene, er å sjekke svar. Eleven har da først funnet et svar uten bruk av digitale hjelpemidler, før hun tar disse i bruk for å se om en alternativ framgangsmåte fører til samme svar. Dette er i tråd med Perssons (2009) tanker om hensiktsmessig hjelpemiddelbruk, når han understreker betydningen av å beherske metodene både for hånd og ved hjelp av grafisk kalkulator. Bruksmåten tyder også på at eleven behersker flere representasjonsformer for den aktuelle kunnskapen, en egenskap både Solvang (1992) og Duval (2006) har pekt på som sentral i utviklingen av matematisk forståelse.

Bruksområdene vi har sett på til nå, har alle vært metoder med fokus på produkt. Målet med å bruke de digitale hjelpemidlene har vært å komme fram til et svar på en gitt oppgave. På spørsmål kan ingen av elevene som ble intervjuet komme på at de har brukt hjelpemidlene til utforskende oppgaver i særlig grad. Selv om disse er fire elever fra samme klasse, og ikke kan brukes til å generalisere, peker resultatene fra TIMSS Advanced 2008 i samme retning. Funnene tyder på at norske elever sjelden har fokus på selve løsningsprosessen når bruker de digitale hjelpemidlene. Dette er problematisk, siden forskningen viser at prosessorientert arbeid er viktig for fruktbar bruk av hjelpemidler (Geiger, Faragher & Goos, 2010; Persson, 2009). Schoenfeld (1985, ref. i Lithner, 2003) peker på at disse manglene kan skyldes et for stort fokus på resultater, at elevene søker å få riktig svar på mange oppgaver på kort tid, heller enn å arbeide inngående med mer komplekse problemstillinger. Jeg kommer tilbake til dette i kapittel 6.5, der jeg diskuterer framtiden i norsk matematikkundervisning.

6.2 Hva påvirker elevenes bruk av digitale hjelpemidler?

Andre del av min hovedproblemstilling handler om hvordan bruken av digitale hjelpemidler påvirkes av en oppgaves utforming og ordlyd. Som en hjelp til å besvare spørsmålet definerte jeg begrepet triggerord – ord og formuleringer i oppgaven som leder elevene til å bruke hjelpemidler. Hvis vi ser på testens fire første oppgaver, later det til at det er hold i teorien om triggerord. Oppgave 1, 2 og 4 kan, dersom man ser muligheten, løses forholdsvis enkelt med å tegne grafer på kalkulator eller i GeoGebra. Oppgave 3 lar seg ikke løse like enkelt gjennom et digitalt verktøy, men inneholder flest triggerord. Resultatene fra testen viser at oppgave 3 er den av de fire der flest bruker hjelpemidler, og i intervjuer forklarer elevene dette med at oppgaven opplagt handler om koordinatsystemet. Oppgave 1 framstår som testens vanskeligste, når vi tar hensyn til testklassens resultater og de norske resultatene fra TIMSS Advanced. Selv om den kan løses med digitale hjelpemidler var det kun 2 av 17 elever i testklassen som benyttet den muligheten, og det er ikke grunn til å tro at andelen var vesentlig høyere blant elevene i undersøkelsen i 2008. Elevene forteller at de ikke tenkte på digitale verktøy som aktuelle, og forklarer det med at de sjelden bruker dem på oppgaver av en slik art.

I sum tyder resultatene på at hovedgrunnen til at elevene bruker grafisk kalkulator eller GeoGebra på en oppgave, er at de gjenkjenner den innenfor en oppgavetype der de har brukt hjelpemidler tidligere. For å oppnå denne gjenkjennelsen spiller triggerord en sentral rolle. Det later ikke til at man reflekterer i særlig grad over hvorvidt digitale verktøy kan være til hjelp; valg av løsningsmetode blir tatt raskt. På denne måten kan vi si vane spiller en stor rolle for elevenes hjelpemiddelbruk. Ser man dette i sammenheng med Hals' (2010) studie av hvordan GeoGebra brukes i undervisningen, oppleves elevenes anvendelser som en naturlig konsekvens av lærernes fokus når de bruker matematisk programvare. Dataprogrammet brukes oftest til å vise elevene hvordan de kan løse bestemte oppgaver, og i en norsk virkelighet der vi bruker liten tid til diskusjoner og resonnement i matematikkundervisningen, fører dette til at hjelpemidlene først og fremst blir brukt instrumentelt.

I møte med oppgaver der eleven kjenner en løsningsmetode både for hånd og ved hjelp av digitale verktøy, er tidsbruk viktig for elevens valg. At hjelpemiddelet løser oppgaven raskt og enkelt blir ofte oppgitt som årsaken til å bruke det. Intervjuene viser at dette gjelder selv om eleven kjenner de negative sidene ved hyppig bruk av digitale hjelpemidler, og til og med oppgir at de fører til at man lærer mindre matematikk. Vi kan se på oppgave 6 som et eksempel, der elevene skulle finne nullpunktene, topp- og bunnpunktene til grafen til en gitt funksjon. 11 av 17 elever løste denne i GeoGebra, og sparte tid sammenliknet med elevene som løste den for hånd. Det viste seg så at under halvparten av de elevene som klarte oppgaven med GeoGebra, lyktes i å løse den for hånd. Grønmo, Onstad og Pedersen (2010) nevner derivasjon av funksjonsuttrykk som en ferdighet som bør være automatisert hos matematikkekspertene på videregående skole, men eksempelet viser at dette langt fra er tilfellet. I teorikapittelet så vi hvordan Reznichenko (2007, ref. i Persson, 2009) beskrev kalkulatoren som en støtte til kognitive og metakognitive prosesser, og pekte på at den kan avlaste det han kaller «lower level cognitive skills» slik at tankekraften kan rettes mot «higher order cognitive skills». Slik mange elever bruker hjelpemidlene i dag, illustrert gjennom oppgave 6, bidrar de heller til at elevene *slipper* å tenke, noe flere av elevene påpeker i intervju. Dette leder oss over til hvordan elevene influeres av hjelpemiddelbruken, noe som er tema for neste delkapittel.

6.3 Elevenes holdninger og ferdigheter

Min underproblemstilling er:

Finnes det indikasjoner på at elevenes holdninger og ferdigheter i matematikk påvirkes av deres bruk av digitale hjelpemidler?

Det viser seg at elevene i all hovedsak er positive til de digitale hjelpemidlene. En av grunnene er gjengitt over, at de bidrar til rask og enkel problemløsing. En annen positiv side ved verktøyene, som blir nevnt av alle elevene, er at de fremmer forståelse av begreper gjennom visualisering. Her er elevene på bølgelengde med Persson (2009), som viser til at flere studier har fremhevet det kraftfulle visuelle aspektet ved grafisk kalkulator. Denne fordelen blir enda sterkere i GeoGebra, der jeg tror de dynamiske mulighetene kan gjøre det lettere for elevene å nå det Sfard kaller reifikasjon – «an instantaneous quantum leap: a process solidifies into object, into a static structure» (Sfard, 1991, s. 20).

En annen fordel elevene trekker fram, er at hjelpemidlene gjør det mulig å løse større problemer. Større problemer kan her tolkes på to måter. Elevene kan sikte til problemer som krever lange utregninger, der hjelpemidlene kan uføre disse raskt. I slike tilfeller har ikke hjelpemiddelbruken noen pedagogisk hensikt, men kan tvert imot føre til at elevene mister innsikt i bakgrunnen for utregningene. Alternativt kan elevene sikte til oppgaver av en mer kompleks art, som stiller krav til høyere ordens tenkning. Dette er i tråd med Reznichenkos (2007, ref. i Persson, 2009) syn om at kalkulatoren gir elevene muligheten til å delta i kognitive aktiviteter som ellers ville ligget utenfor deres rekkevidde. På denne måten blir hjelpemiddelet et medierende verktøy, et begrep som stammer fra Vygotskys sosiokulturelle læringssyn (Imsen, 2005). I møte med utfordrende oppgaver bringes eleven lenger ut i sin proksimale utviklingssone, godt hjulpet av kalkulator og lærer (Rivera & Becker, 2004). Fordelen er altså åpenbar; spørsmålet er hvor vanlig dette er i norsk matematikkundervisning. TIMMS Advanced 2008 viser at norske elever bruker klart mest tid på å løse oppgaver som likner på eksempler fra læreboka. Elevene som ble intervjuet oppgir også at de sjelden bruker hjelpemidlene til å jobbe med alternative og mer utforskende oppgaver. Hals' (2010) studie underbygger dette, men antyder likevel en tendens som kan tyde på at en endring er i ferd med å skje. Jeg kommer tilbake til dette i kapittel 6.5.

Alle elevene som ble intervjuet fortalte at de har blitt dårligere i hoderegning som følge av hjelpemiddelbruk. De oppga at de bruker kalkulator til enkle utregninger i så godt som hver time, og forklarte bruken med at det har blitt en vane for dem, siden den gir svar raskt og enkelt. Kombinert med resultatene fra forrige kapittel, som tydet på at elever som ofte bruker hjelpemidler glemmer framgangsmåter med penn og papir, står dette i kontrast til Perssons hypotese som sier at «there is no generally observed decline in students' manual or mental skills» (2009, s. 51). Vi skal likevel ha i mente at Persson forutsatte at hjelpemidlene ble brukt hensiktsmessig i undervisningen, noe Hals (2010) og Grønmo, Onstad og Pedersen (2010) har vist at ikke alltid er tilfellet i Norge i dag. Funn i min studie må altså begrenses til at hjelpemiddelbruken blant elevene som deltok ikke fremmer deres hoderegning og manuelle ferdigheter, snarere tvert i mot.

Som en følge av dette gir elevene uttrykk for noe svekket selvtillit i møte med matematiske problemer. Löwing og Kilborn (2003) hevder at hoderegning og evnen til å gjøre overslag har blitt enda viktigere etter digitale verktøys inntog i skolen, for å vurdere rimeligheten i svarene man får fra hjelpemidlene. Denne evnen synes altså å være svekket blant mange elever i dag; i intervju forteller flere at hjelpemiddelbruken fører til at de tenker mindre på den underliggende matematikken. Lavere selvtillit er problematisk på flere måter, blant annet kan det føre til dårligere motivasjon i faget, slik at det hele blir en ond sirkel. En av elevene som ble intervjuet oppsummerer mye av det jeg har tatt opp her på en humoristisk og god måte:

> *For eksempel, hvis en unge kom og spør meg om integralet til det, så måtte jeg hatt PC for å kunne hjelpe han.*

Dessverre er det for tiden få unge som er ute og spør etter integraler, men ordet «integralet» kan byttes ut med enklere matematiske begrep, og setningen vil fortsatt være sann for en god del elever. For mange gir altså sitatet et godt bilde på hvor avhengig man kan bli av hjelpemidlene, og hvordan den matematiske selvtilliten svekkes når man ikke har tilgang på dem.

Det siste aspektet jeg tar for meg knyttet til elevenes holdninger og ferdigheter, er hvilke oppgavetyper de foretrekker. Alle mine informanter kunne raskt svare at de liker rene regneoppgaver bedre enn såkalte grubleoppgaver. Det er umulig å fastslå at denne holdningen skyldes deres bruk av digitale hjelpemidler, men årsakene de oppgir for sine valg gir grunn til å tro at det kan være en viss sammenheng. Hovedårsaken hos de fleste er at de som regel kjenner en oppskrift for hvordan de skal løse rene regneoppgaver, og at det derfor går kjapt og greit å komme fram til et svar. Dette med tidsbruk kjenner vi igjen som en hovedgrunn for å bruke hjelpemidler i oppgaveløsing. Et sitat fra en av elevene styrker mistanken om en sammenheng mellom hvilke oppgavetyper man foretrekker og bruk av digitale verktøy:

> *Jeg syns det er lettere når det står bare en graf, og så skal jeg løse den, også er det en graf til, så skal jeg løse den.*

Mange slike oppgaver vil ta lenger tid om man løser dem for hånd, og siden tidsbruk er et sentralt element for elevene, kan hjelpemidlene ha vært med og føre til at mange foretrekker såkalte rutineoppgaver.

En annen grunn til at elevene foretrekker oppgaver der de kjenner en løsningsalgoritme, er at de opplever problemløsningsoppgaver som vanskelige, og at de føler det litt tilfeldig om de kommer fram til et svar eller ikke. Dette er en helt naturlig årsak, alle kan kjenne seg igjen i ønsket om å få til oppgaver man blir gitt, uavhengig av om de er matematiske eller ikke. Mestringsfølelse er et sentralt element for elevens motivasjon, og det er følgelig viktig å legge problemløsningsoppgavene på riktig nivå, i tråd med Vygotskys teori om den proksimale utviklingssonen (Imsen, 2005). Man kan hevde at å løse mange lignende oppgaver ved å tegne grafer i GeoGebra, som eleven i sitatet over, ikke fører til mye læring. For lærere blir det derfor viktig å motivere elevene i møte med utfordrende oppgaver, slik at de føler glede og nytte over å bruke mye tid på en enkelt oppgave, uten at det går ut over mestringsfølelsen deres. Dette kommer jeg tilbake til i kapittel 6.5, etter at jeg har trukket noen konklusjoner om funn i denne studien.

6.4 Konklusjoner

Formålet med mine undersøkelser er å bidra til diskusjonen Grønmo, Onstad og Pedersen (2010) inviterer til i rapporten etter TIMSS Advanced 2008, om hvorvidt den norske bruken av kalkulator bidrar til å utvikle matematisk forståelse hos elevene. På bakgrunn av de siste årenes utvikling med stadig økende bruk av PC i undervisningen, har jeg i oppgaven argumentert for å innlemme matematisk programvare i problemstillingen. Hovedproblemstillingen «Hvordan bruker norske elever grafisk kalkulator og GeoGebra i oppgaveløsing, og hvordan påvirkes bruken av oppgavens utforming?» har vært mitt utgangspunkt i forsøket på å beskrive sider ved norske elever bruk av digitale hjelpemidler. Hovedfunnene fra undersøkelsen kan presenteres punktvis:

- Elevene bruker digitale verktøy først og fremst på oppgaver som er av en type der de har brukt hjelpemidlene tidligere, og hvor de kjenner en bestemt framgangsmåte for bruk av hjelpemiddelet. Dette dreier seg hovedsakelig om oppgaver knyttet til funksjoner og integraler. Norske elever presterer, relativt sett, godt på slike oppgaver. Prestasjoner på oppgaver som ikke ligger til rette for bruk av hjelpemidler, innen disse temaene, er ikke like gode.

- Elevene bruker til en viss grad hjelpemidlene når de er usikre på hvordan et problem kan løses. Denne bruken kan deles i to, med utgangspunkt i elevens plan for å bruke hjelpemiddelet. Den ene delen kaller jeg kreativ; eleven har en tanke om hvordan problemet kan løses, og bruker et digitalt verktøy i løsningsforsøket. Den andre delen kaller jeg famlende; eleven har ingen klar tanke om hvordan problemet kan løses, men bruker digitalt verktøy i håp om at det kan gjøre oppgaven klarere. Famlende hjelpemiddelbruk er ofte utløst av triggerord.

- Triggerord er viktige for at elevene skal gjenkjenne en oppgave som en der de kan bruke digitale hjelpemidler.

- Elevene diskuterer sjelden problemløsningsstrategier, og bruker i liten grad hjelpemidler i arbeid med utforskende oppgaver.

Den andre problemstillingen min knyttet seg til elevenes holdninger og ferdigheter i matematikk, og om det finnes indikasjoner på at disse blir påvirket av elevenes bruk av digitale hjelpemidler:

- Elevene mener digitale verktøy fremmer forståelsen av matematiske begreper, først og fremst gjennom visualisering.

- Elevene er opptatt av tidsbruk i oppgaveløsingen, og liker at digitale verktøy gir svar raskt og enkelt. De kjenner til negative sider ved å bruke hjelpemidler, men dette overskygges av den positive siden knyttet til effektiv bruk av tiden.

- Elevene oppgir at de har blitt dårligere i hoderegning på grunn av utstrakt bruk av hjelpemidler.

- Elevene foretrekker rene regneoppgaver framfor problemløsingsoppgaver, og liker å ha en oppskrift de kan følge, enten for hånd eller med digitale verktøy.

Funnene i denne undersøkelsen gir støtte til Grønmo, Onstad og Pedersens (2010) antakelse om at kalkulator og PC i liten grad blir «utnyttet på en innsiktsfull måte med sikte på å gjøre elevene til bedre problemløsere» (s. 159). I det neste delkapittelet kommer jeg derfor med mitt syn på hvilke implikasjoner funnene kan ha for norsk matematikkundervisning.

6.5 Mulige konsekvenser for norsk matematikkundervisning

Siden mange av oss har vært skeptisk til alt fra fargefjernsyn til glassfiberski, starter jeg diskusjonen om hva mine funn kan bety for norsk matematikkundervisning med et sitat hentet fra Grugnetti og Jaquet (1996):

> It is no longer a question of accepting or rejecting the new technology, but rather of determining its place in the teaching of mathematics and of trying to evaluate its effect on teaching practices and on student learning. (ref. i Bergqvist, 2002, s. 3)

Dette synet gjenspeiles i Kunnskapsløftets innlemmelse av «å kunne bruke digitale verktøy» som en grunnleggende ferdighet. Som følge av dette kan vi med en gang utelukke det som kunne vært et alternativ; nemlig å fjerne grafiske kalkulatorer og PC fra matematikkundervisningen. Hjelpemidlene er kommet for å bli, målet er å bruke dem der det er pedagogisk hensiktsmessig. I kapittel 2.4 tok jeg for meg hvilke grunner forskningen gir for å bruke digitale hjelpemidler i undervisningen. Her blir deres egenskaper som kognitive verktøy trukket fram (Persson, 2009), men mine funn tyder på at hjelpemidlene hovedsakelig blir brukt som et rent regneverktøy i norsk skole. I tiden framover blir det derfor viktig å jobbe for å gjøre kalkulator og matematisk programvare til en naturlig del av elevenes arbeid i matematikk, ikke bare et instrument som gir riktig svar på enkelte oppgavetyper. For å oppnå dette, har jeg på bakgrunn av mine funn kommet fram til noen punkter hvor det finnes forbedringspotensial.

For det første må elevenes ferdigheter i de aktuelle hjelpemidlene bedres. Lagrange (1999, ref. i Rossevatn, 2006) påpeker at det kreves mye trening for å utnytte digitale hjelpemidler på en god måte. Norske elever kjenner en god del framgangsmåter og kommandoer, men kan ikke sies å være trygge i et program som GeoGebra. Læreren er viktig for elevenes ferdigheter i IKT, og i TIMSS Advanced oppga over halvparten av lærerne at de hadde deltatt i etterutdanning knyttet til IKT i matematikk i løpet av de siste to årene (Grønmo et al., 2010). Vi er med andre ord på riktig vei, men med den rivende utviklingen vi ser innen teknologien i dag, må dette være kontinuerlig arbeid.

For det andre, og kanskje viktigste, fører hjelpemidlene til at vi må endre undervisningsmetodene. Gjennom en opplæring som legger mye vekt på individuelt arbeid, der elevene i stor grad regner oppgaver som ligner på eksempler i læreboka, lar vi elevene bruke hjelpemidlene som en krykke. Geiger, Faragher og Goos (2010) hevder hjelpemidlene kan bidra til diskusjoner i klasserommet; diskusjoner som stimulerer elevene til høyere ordens tenkning. For å oppnå dette er vi avhengig av læreren som en tydelig leder av diskusjonen (Geiger, Faragher & Goos, 2010; Hattie, 2009), og at elevene får oppgaver som naturlig leder til samtaler om problemløsingen. Her er vi ved et vesentlig poeng, for selv om lærerne får etterutdanning i IKT, savner mange kursing knyttet til hvordan hjelpemidlene kan brukes pedagogisk, ikke bare hvordan de brukes rent teknisk (Bennison & Goos, 2010). Dette kan ses i sammenheng med problemløsing, og godt under 10 % av norske matematikklærere oppgir at de har deltatt i etterutdanning knyttet til problemløsing i de siste to årene (Grønmo et al., 2010). Det virker ikke som problemløsing blir prioritert i norsk skole, og på bakgrunn av aktuell forskning og mine funn mener jeg dette er et felt hvor vi trenger kompetanseheving.

Hals (2010) viser i sin mastergradsoppgave at utviklingen likevel ser ut til å gå riktig vei. 25 % av lærerne som bruker matematisk programvare har endret typen oppgaver elevene jobber med. Blant de som bruker dynamisk programvare, eksempelvis GeoGebra, er andelen enda større, og dreiningen har vært i retning mer utforskende oppgaver og problemløsing. Monaghan (2000, ref. i Brown, 2009) peker på at det er utfordrende å lage oppgaver som innbyr til å bruke teknologiske hjelpemidler, noe jeg mener er nok et argument for å prioritere etterutdanning innen problemløsing.

Elevene framhever tidsbruk som sentralt for deres valg av løsningsmetoder, og fokuserer på å finne svar raskt. Schoenfeld (1985, ref. i Lithner, 2003) forklarer en slik tankegang med for stort fokus på karakterer og resultater, hvor forståelse har en tendens til å bli nedprioritert. Dette er i tråd med Imsen (2005), som hevder at elevene kan bli for opptatt av å få rette svar, og med det mister den underliggende matematikken av syne. For lærere blir det derfor viktig å tone ned viktigheten av å gjøre mange oppgaver, slik at elevene får muligheten til å reflektere over matematikken bak svarene. Geiger, Faragher og Goos (2010) retter dette mot digitale hjelpemidler, når de legger vekt på at læreren må stimulere til fokus på prosess, heller enn produkt og resultat, i arbeid med digitale verktøy. Igjen understrekes altså betydningen av at læreren inntar en styrende rolle i klasserommet, og oppmuntrer til å arbeide med oppgaver man ikke umiddelbart forstår. Hattie (2009) peker på hvor viktig det er for utviklingen av en dypere matematisk forståelse at en ser det som naturlig å gjøre feil og stå fast. Denne holdningen må læreren skape, og lykkes han vil det trolig være løsningen på at mange elever misliker grubleoppgaver fordi de tar lang tid.

Med utgangspunkt i det jeg har skrevet her, kan det virke som om alle utfordringer løser seg bare vi fokuserer mer på problemløsing i undervisningen. Slik er det selvsagt ikke. Lærere må fortsatt gjennomgå og forklare nytt stoff for klassen, og elevene må fortsatt regne oppgaver og automatisere ferdigheter. Klarer vi i tillegg å innlemme problembasert undervisning ved hjelp av digitale verktøy i større grad enn i dag, tror jeg det vil føre til mer motiverte elever, som er bedre i stand til å vurdere når kalkulatoren eller GeoGebra kan være til hjelp. Dette vil igjen minske betydningen av triggerord, og gjøre elevene mer kritiske i sin egen oppgaveløsing.

6.6 Videre forskning

Min studie har basert seg på TIMSS Advanced 2008, og det vil bli svært interessant å se hvilke resultater neste TIMSS Advanced-undersøkelse gir. Spesielt spennende blir den for å se hvilke følger innføringen av Kunnskapsløftet har fått for norske prestasjoner i matematikk, og hvilke endringer den nye læreplanen har ført til når det gjelder undervisningspraksis.

Jeg har tatt for meg elevers bruk av hjelpemidler på ulike oppgaver. Et felt som trenger å bli belyst er hvordan de har lært denne bruken. Dette knytter seg tett opp mot undervisningsmetoder, og hvordan lærerne faktisk anvender hjelpemidlene i klasserommet. I resultatkapittelet antydet jeg at man høster som man sår, og har gjennom mine undersøkelser beskrevet hva vi «høster». Tar vi den rivende teknologiske utviklingen i betraktning, er det stadig rom for mer forskning på hva norske lærere «sår», med hensyn til digitale verktøy.

Et annet emne som kan være aktuelt for videre undersøkelser, er knyttet til de to typene hjelpemiddelbruk som jeg har valgt å kalle kreativ og famlende. Min studie gjør det vanskelig å beskrive disse typene klart, siden jeg må forholde meg til elevenes svar og intervjuer etter at oppgavene er gjort. For å få en tydeligere forståelse av kreativ kontra famlende bruk av hjelpemidler er vi avhengig av å få innsikt i elevenes tankegang underveis i oppgaven, slik at man ikke kan pynte på tankegangen i etterkant.

Jeg startet dette arbeidet med å fokusere på grafisk kalkulator, men innså tidlig at jeg måtte innlemme matematisk programvare i problemstillingen. Underveis i arbeidet har den teknologiske utviklingen løpt videre, og nylig kom den første norske applikasjonen for nettbrett og smarttelefoner som lar brukeren lære likningsløsing gjennom et spill (Aftenposten, 11. 5. 2012). Presset om å ta stadig nye hjelpemidler i bruk kommer til å være stort, og her må forskningen holde tritt så godt som mulig. Det overordnede målet er klart, men det synes som det fortsatt er et stykke igjen før vi når det som ble formulert allerede i 2000:

> Ny teknologi gir nye muligheter til å eksperimentere og utforske, og skolematematikken må utnytte disse mulighetene der det er faglig og pedagogisk hensiktsmessig. (KUF, 2000, s. 6)

Litteraturliste

Bennison, A., & Goos, M. (2010). Learning to Teach Mathematics with Technology: A Survey of Professional Development Needs, Experiences and Impacts. *Mathematics Educational Research Journal, 22*(1), s. 31-56.

Bergem, O. K. (2008). *Individuelle versus kollektive arbeidsformer. En drøfting av aktuelle utfordringer i matematikkundervisningen i grunnskolen.* Akademisk avhandling, Universitetet i Oslo, Oslo.

Bergqvist, T. (2002). *Matematisk Begreppsbildning och IT* . Umeå universitet, Umeå. Hentet 10. April 2012, fra http://www.edusci.umu.se/digitalAssets/59/59631_pmnr176sec.pdf

Bjørkeng, P. K. (2012, 11. mai). Lærer algebra av app. *Aftenposten*. Hentet 12. mai 2012, fra http://www.aftenposten.no/kultur/Larer-algebra-av-app-6826928.html

Botten, G. (2005). Om reflektert og ureflektert moromatematikk. *Tangenten, 2005*(2), s. 2-4.

Brown, R. (2009). The use of the Graphing Calculator in High Stakes Examinations: Trends in Extended Response Questions over Time. I C. Winsløw (Red.), *Nordic Research in Mathematics Education. Proceedings from NORMA08 in Copenhagen, April 21.–April 25., 2008* (s. 253-260). Rotterdam: Sense Publishers.

Drijvers, P. (2009). Tools and tests: technology in national final mathematics examinations. I C. Winsløw (Red.), *Nordic Research in Mathematics Education. Proceedings from NORMA08 in Copenhagen, April 21.–April 25., 2008* (s. 225-236). Rotterdam: Sense Publishers.

Duval, R. (2006). A cognitive analysis of problems of comprehension in learning of mathematics. *Educational Studies in Mathematics, 61*(1), s. 103-131.

Fuglestad, A. B. (2009). Å være digital i matematikk. I H. Otnes (Red.), *Å være digital i alle fag* (s. 149-165). Oslo: Universitetsforlaget.

Geiger, V., Faragher, R., & Goos, M. (2010). CAS-enabled technologies as "agents provocateurs" in Teaching and Learning Mathematical Modelling in Secondary School Classrooms. *Mathematics Education Research Journal, 22*(2), s. 48-68.

Gjone, G. (2001). Matematikkdidaktikk som vitenskap – nasjonal utvikling og internasjonal organisering. I E. Elstad (Red.), *Acta Didactica: Fagdidaktikkens identitet og utfordringer* (s. 81-105). Oslo: Unipub.

Grønmo, L. S., & Onstad, T. (2009). *Tegn til bedring. Norske elevers prestasjoner i matematikk og naturfag i TIMSS 2007.* Oslo: Unipub.

Grønmo, L. S., Onstad, T., & Pedersen, I. F. (2010). *Matematikk i motvind. TIMSS Advanced 2008 i videregående skole.* Oslo: Unipub.

Hals, S. (2010). *IKT i matematikkopplæringen – tidstjuv eller tryllemiddel? En studie av faktorer som kan påvirke bruken av IKT generelt og GeoGebra spesielt, hos lærere og elever på 10. og 11. årstrinn.* Akademisk avhandling, Universitetet i Agder, Kristiansand. Hentet 20. mars 2012, fra http://www.inter-ped.no/masteroppgave/Masteroppgave%20i%20matematikkdidaktikk%20av%20Sigbj%F8rn%20Hals%2002-06-10.pdf

Hattie, J. (2009). *Visible learning. A synthesis of over 800 meta-analyses relating to achievement.* New York: Routledge.

Imsen, G. (2005). *Elevens verden. Innføring i pedagogisk psykologi.* Oslo: Universitetsforlaget.

KD. (2006a). *Kunnskapsløftet. Læreplan for grunnskolen og videregående opplæring.* Oslo: Kunnskapsdepartementet.

KD. (2006b). *Læreplanverket for Kunnskapsløftet.* Oslo: Kunnskapsdepartementet. Hentet 6. april 2012, fra http://www.udir.no/upload/larerplaner/Fastsatte_lareplaner_for_Kunnskapsloeftet/Kunnskapsloftet_midlertidig_utgave_2006_tekstdel.pdf

Klette, K. (2008). Når elever får ansvaret for å forvalte egen ulykke. *Bedre skole, 2008*(1), s. 9-13.

Kløvstad, V. (2009). *ITU Monitor. Skolens digitale tilstand 2009.* Forsknings- og kompetansenettverk for IT i utdanning, Oslo. Hentet 21. mars 2012, fra http://www.itu.no/filestore/Rapporter_-_PDF/ITU_monitor09_web.pdf

KUF. (2000). *Læreplan for videregående opplæring, Matematikk. Studieretningsfag i studieretning for allmenne, økonomiske og administrative fag*. Oslo: Kirke-, utdannings-, og forskningsdepartementet.

Lithner, J. (2003). Students' Mathematical reasoning in University textbook exercises. *Educational Studies in Mathematics, 52*(1), s. 29-55.

Löwing, M., & Kilborn, W. (2003). *Huvudräkning. En inkörsport till matematiken* . Lund: Studentlitteratur.

Mullis, I. V., Martin, M. O., Robitaille, D. F., & Foy, P. (2009). *TIMSS Advanced 2008 International Report.* Chestnut Hill, MA: TIMSS & PIRLS International Study Center, Lynch School of Education, Boston College.

Persson, P. E. (2009). Handheld calculators as tools for students' learning of algebra. *Nordic Studies in Mathematics Education, 14*(2), s. 49-77.

Rivera, F., & Becker, J. R. (2004). A sociocultural account of students’ collective mathematical understanding of polynomial inequalities in instrumented activity. I M. J. Høines, & A. B. Fuglestad (Red.), *Proceedings of the 28th Conference for the*

International Group for the Psychology of Mathematics Education, 4 (s. 81-88). Bergen: Bergen University College.

Rossevatn, O. E. (2006). *IKT som læringsverktøy i matematikk. En studie av lærer- og elevrollen ved bruk av TI Interactive (og andre programmer) i 4 matematikkklasser i videregående skole.* Akademisk avhandling, Høgskolen i Agder, Kristiansand.

Sfard, A. (1991). On the Dual Nature of Mathematical Conceptions: Reflections on Processes and Objects as Different Sides of the same Coin. *Educational Studies in Mathematics, 22*(1), s. 1-36.

Skemp, R. R. (1976). Relational Understanding and Instrumental Understanding. *Mathematics Teaching, 77*(3), s. 20-26.

Solvang, R. (1992). *Matematikkdidaktikk.* Oslo: NKI-Forlaget.

Solvang, R., & Mellin-Olsen, S. (1978). *Matematikk fagmetodikk.* Rud: NKI-forlaget.

Säljö, R. (2002). Læring, kunnskap og sosiokulturell utvikling: mennesket og dets redskaper. I I. Bråten (Red.), *Læring i sosialt, kognitivt og sosialt-kognitivt perspektiv* (s. 31-57). Oslo: Cappelen Akademiske Forlag.

Trouche, L. (2004). Managing the complexity of human/machine interactions in computerized environments: Guiding students' command process through instrumental orchestrations. *International Journal of Computers for Mathematical Learning, 9*(3), s. 281-307.

Trouche, L. (2005). Calculators in mathematics education: a rapid evolution of tools, with differential effects. I D. Guin, K. Ruthven, & L. Trouche (Red.), *The didactical challenge of symbolic calculators: turning a computational device into a mathematical instrument* (s. 9-40). Dordrecht: Kluwer.

Utdanningsdirektoratet. (2006a). *Læreplan i matematikk for realfag - programfag i studiespesialiserende utdanningsprogram*. Hentet Mars 28, 2012 fra http://www.udir.no/Lareplaner/Grep/Modul/?gmid=0&gmi=20241&v=5&s=2&kmsid=20266

Utdanningsdirektoratet. (2006b). *Læreplan i matematikk for realfag - programfag i studiespesialiserende utdanningsprogram*. Hentet Mars 29, 2012 fra http://www.udir.no/Lareplaner/Grep/Modul/?gmid=0&gmi=20241&v=5&s=2&kmsid=20267